122

TEMA CENTRAL
MODELO ARGUMENTATIVO NYAYA Y RAZONAMIENTO DEDUCTIVO
MIGLENA ASENOVA

TEMA CENTRAL
DESCRIBIR, CLASIFICAR Y RECONOCER FORMAS GEOMÉTRICAS EN PREESCOLAR
AGNESE DEL ZOZZO

TEMA CENTRAL
EL NIÑO HEROICO
ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE EL APRENDIZAJE EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL
LUIS RADFORD

REVISTA INTERNACIONAL

MAGISTERIO

EDUCACIÓN & PEDAGOGÍA

Educación matemática

ISSN 1692-4053 122

REVISTA INTERNACIONAL MAGISTERIO

No. 122 / 2024
ISSN 1692 - 4053

DIRECCIÓN GENERAL
Alfredo Ayarza Bastidas

DIRECCIÓN EDITORIAL
Daniel Ayarza Sánchez
daniel@magisterio.com.co

EDITORES INVITADOS
Bruno D'Amore
Martha Isabel Fandiño Pinilla

DISEÑO GRÁFICO
Diego Calderón

PORTADA
Diego Calderón

SUSCRIPCIONES
ventas@magisterio.com.co
(+57) 312 4354489

www.magisterio.com.co

SOBRE NOSOTROS

El proyecto Magisterio es una iniciativa de educadores colombianos que tiene como propósito coadyuvar a la mejora de la calidad de la educación a la que tienen derecho los ciudadanos de todos los países, especialmente los niños, las niñas y los jóvenes. Para esto, ha establecido cuatro frentes de trabajo así: la Editorial Magisterio, la Librería Magisterio, la Revista Internacional Magisterio y Magisterio Formación. A través de estos frentes buscamos cubrir las necesidades de producción y difusión del saber pedagógico de los maestros latinoamericanos, así como de consulta especializada y formación docente continua y pertinente.

MAGISTERIO EDITORIAL

Editorial Magisterio:
Contamos con un catálogo de más de 800 títulos en los temas más relevantes en educación y pedagogía (gestión educativa, didácticas, evaluación, currículo, convivencia, entre otros).

MAGISTERIO REVISTA

Revista Internacional Magisterio:
Publicación bimensual que busca mantener actualizados a los docentes latinoamericanos sobre tendencias y prácticas de aula que impacten positivamente su labor.

MAGISTERIO FORMACIÓN

Magisterio Formación:
Formación virtual y presencial para la actualización pedagógica a instituciones y docentes que desean reflexionar sobre su práctica pedagógica.

MAGISTERIO LIBRERÍA

Librería Magisterio:
Una oferta de más de 30.000 títulos en las diferentes áreas de la educación formal, educación para el trabajo y el desarrollo humano y, educación informal.

122

Contenido

Editorial

Reflexiones sobre la práctica docente y el aprendizaje de la matemática, teniendo como base la investigación científica en Educación matemática

Martha Isabel Fandiño Pinilla y Bruno D'Amore

De decenios nuestra disciplina Educación matemática es internacionalmente reconocida y aceptada como un tema de investigación científico. Existen centros universitarios de investigación, revistas de investigación, congresos en los cuales se propone y se debate la investigación en Educación matemática.

Nuestra disciplina es enseñada en los cursos universitarios de Matemática, prevé licenciaturas, grados de diferentes tipos, especializaciones, maestrías, doctorados y post doctorados. Se siguen los usuales procedimientos típicos de las ciencias: árbitros para exprimir juicios sobre lo que los investigadores desean publicar, debates, en ocasiones profundos, diversas teorías que se confrontan entre sí, … Existe también una historia de la Educación matemática, que consideramos tenga su inicio en los años '70 – '80 en Europa, pero que hoy tiene interpretaciones críticas diversas, serias, técnicas, como sucede con todas las teorías científicas que se respeten.

Sin embargo... Tal vez porque estamos hablando sólo de algunos decenios, encontramos aún hoy estudiosos (incluso respetables investigadores en otros campos), docentes, directores o dirigentes de instituciones educativas, políticos, que no entienden, que no saben distinguir, que nunca han intentado ni siquiera estudiar la cuestión o tratar de entender la problemática, que confunden el sustantivo "Didáctica" (incluso se está explícitamente relacionado con una disciplina "dura" como la Matemática) con Pedagogía, o con actividad de enseñanza, o con horas de docencia, o con la disponibilidad de explicar a los estudiantes el proprio saber … Este fenómeno, que se puede imputar a la ignorancia, es de hecho muy difundido.

Ahora bien, TODOS los autores llamados en esta ocasión para conformar este número de la revista, son afirmados investigadores en el tema Educación matemática entendida como disciplina científica, algunos con un nombre que es reconocido a nivel mundial, otros están iniciando el recorrido como investigadores pero que ya han manifestado una gran capacidad para estudiar e investigar problemáticas relacionadas con esta disciplina científica.

La casa Editorial Magisterio de Bogotá está por presentar al público una media docena de nuevos textos todos inherentes a la Educación matemática, de diversos autores, algunos de los cuales están presentes en este número especial de la revista Magisterio; y nos pidió de preparar un número especial por presentar NO al restringido público de técnicos, de los especialistas, de los investigadores, sino que se le hable al vasto público de los docentes quienes cada día afrontan el delicado e importante problema de la "transposición didáctica", es decir la transformación de su "Saber" (de adulto, por lo general alcanzado gracias a los cursos universitarios) en un "saber de enseñar", por tanto adaptado a los estudiantes de los cursos de formación básica, jóvenes inexpertos, para quienes es necesario, útil, y esperado socialmente un determinado saber matemático. Todo esto teniendo en cuenta el hecho de que la Matemática enseñada deber ser aprendida y no sólo escuchada, por tanto, se deben decidir no sólo los temas, sino también, modos, evaluaciones, modalidades de gestión docente y modalidades de análisis de todo lo aprendido.

Esta es la razón de la colección de ideas que estamos presentando, todas estas dirigidas al fenómeno complejo, interesante, mágico, de las relaciones entre el Saber, el saber de enseñar, el saber aprendido, una de las temáticas que han dado origen a nuestra disciplina, tal vez de forma ingenua inicialmente, pero después siempre más con un carácter científico, técnico, analítico, investigativo.

Los investigadores invitados por nosotros aceptaron de inmediato, entendiendo el sentido profundo y necesario de este evento: ofrecer a los lectores no tanto resultados de investigación, temas científicos, analíticos que se deducen de los resultados de investigación, sino reflexiones de enseñanza – aprendizaje sobre la escuela real, en los diversos países (y son tantos los aquí representados), reflexiones NO debidas al sentido común, que de estas tenemos tantas todos los días (de parte de pseudo inventores de “métodos innovativos milagrosos”, por lo general banales o contraproducentes), sino basadas en la relación cotidiana y directa con los docentes de los cursos de formación básica o universitaria que no son investigadores pero que deben / deberían conocer los resultados de investigación para así ayudarles a estructurar eficazmente el propio trabajo.

A estos docentes va dirigido este trabajo, a los que entendieron la importancia, desde un punto de vista profesional, de tener en cuenta los resultados de la investigación en Educación matemática, a los que tienen el valor de tomar un libro, una revista, leerlos, comentarlos, aunque sólo sea entre sí y sí y decidir si vale la pena transformar el análisis y las observaciones de los expertos de la disciplina en un trabajo cotidiano, para ver cómo se transforma su actividad en aula en algo profesional, técnico y no quedarse en la improvisación, para ver cómo se convierte en algo eficaz, serio, pleno de éxito.

En el agradecimiento a los colegas investigadores por haber aceptado nuestra invitación, agradecemos también a los lectores quienes tomarán conciencia de la necesidad de informarse, de leer, de discutir, de rechazar, de hacer propias las ideas aquí presentadas, signo tangible, cualquiera que sea su actitud, de profesionalidad.

Agradecemos también a la casa editorial Magisterio por la idea profesional de publicar estos libros, y por hacerlos llegar tanto a investigadores como a los docentes de cursos de formación básica o universitarios; así como por la idea de realizar este número especial de la revista, que llegará a las manos de los docentes de Matemática que tienen como tarea la de hacer que los estudiantes aprendan Matemática.

Docente: ¡el trabajo más bello del mundo!

Modelo argumentativo Nyaya y razonamiento deductivo

Miglena Asenova[1]

Resumen

En este artículo se examinan las características del modelo argumentativo nyaya, con el fin de establecer un vínculo con el razonamiento deductivo, haciendo referencia al análisis del funcionamiento cognitivo de los procesos demostrativos en matemática.

Palabras clave: nyaya, demostración, argumentación, razonamiento deductivo, generalización.

Introducción

Uno de los problemas más controvertidos en la evolución del currículo de Matemática tanto en Italia como en otros países es el relacionado con la introducción de los estudiantes en la actividad didáctica de la demostración (Boero et al., 1996; Stylianides, 2007; Durand-Guerrier, 2012; Asenova, 2019). Mientras que algunos académicos no consideran que la demostración esté vinculada con un nivel escolar particular (por ejemplo: Stylianides, 2007), otros subrayan el carácter propedéutico de la argumentación para iniciar la demostración (por ejemplo: Boero et al., 1996), considerando esta última como un caso particular de la argumentación (Durand Guerrier et al., 2012a), más adecuado para niveles escolares superiores.

Incluso en las Indicaciones Nacionales italianas para el primer ciclo de formación (MIUR, 2012) parece compartirse la idea de que, en el nivel de secundaria inferior, y más aún en el nivel de la escuela primaria, no es apropiado hablar de demostración en su más amplio sentido lógico, sino que resulta adecuado introducir a los estudiantes en el razonamiento matemático a través de la argumentación y reservar la demostración para niveles escolares posteriores. Este hecho está vinculado al menos con dos aspectos diferentes: la demostración obedece a dictados lógicos mucho más estrictos y estos dictados lógicos requieren una cierta madurez cognitiva para ser captados y comprendidos y existen diferentes tipos de funciones que, desde el punto de vista de un sujeto, las proposiciones dentro de una producción discursiva (Duval, 2007) se pueden realizar y que también estas funciones tienen ciertos requisitos cognitivos.

En particular, este último aspecto nos lleva a considerar la importancia de la estructura de las producciones discursivas argumentativas y demostrativas y el papel que éstas pueden tener para apoyar o no la transición desde un estilo argumentativo más pragmático, ligado al uso de ejemplos, etc., a un estilo deductivo.

De hecho, como subraya Balacheff (1999), adherirse a una concepción más que a otra de argumentación o de demostración conduce necesariamente a posiciones diferentes respecto de lo que la argumentación puede representar en el contexto de la acción didáctica y en particular en referencia a la demostración, pero también es cierto que la estructura que se cree que tiene una demostración o una argumentación afecta significativamente los análisis de las producciones discursivas de los estudiantes (Duval, 1992-1993; D'Amore, 2005; Asenova, 2022, 2023).

El propósito de este artículo es examinar las características de un modelo argumentativo particular: el modelo nyaya (cuyo nombre traducido significa "lógica"), nacido en el siglo I d.C., dentro de la escuela filosófica india del mismo nombre, mostrando cómo puede representar un puente entre un tipo de argumentación pragmático e inductivo y el estilo argumentativo deductivo clásico de la Matemática. En este sentido, se examinan las características de la argumentación nyaya, tratando de establecer si y en qué sentido son compatibles con el razonamiento deductivo.

Para la caracterización de la nyaya y su papel en el análisis de las proposiciones discursivas de los estudiantes nos remitimos a D'Amore (2005), donde se examinan los argumentos matemáticos espontáneos de estudiantes de secundaria, mostrando cómo estos a menudo reflejan una estructura muy similar a la nyaya. Para el análisis de la estructura nos referiremos a los trabajos de Duval, relacionados con el análisis del funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de prueba (Duval, 1992-93; 2007).

La argumentación nyaya

Según la escuela filosófica india Nyaya, que desarrolló un conjunto de reglas para la especulación racional, el conocimiento falso es una de las causas que impide al ser humano salir del mundo del sufrimiento; el pensamiento recto es, en este sentido, una herramienta indispensable para lograr la liberación. La nyaya estuvo, por tanto, estrechamente vinculada con la concepción ética y religiosa de la corriente filosófica del mismo nombre. Sin embargo, el Nyaya-sutra de Gautama, del siglo I. d. C., en donde se expone la estructura lógica de lo que se consideraba "razonamiento recto", es un auténtico tratado de lógica. Veamos más de cerca este modelo argumentativo, destacando sus herramientas y su esquema de razonamiento. Para esto seguimos a D'Amore (2005).

La nyaya reconoce una importancia preeminente a los siguientes cuatro "medios de conocimiento": *el testimonio, la analogía, la percepción y la inferencia.*

El testimonio incluye todo lo que se considera digno de fe, como por ejemplo las oraciones, la revelación divina, la historia transmitida, etc. *La analogía* es una forma de razonamiento que nos permite definir un objeto en función de su similitud con otros. Este concepto corresponde, en la lógica aristotélica, con la definición por género próximo y diferencia específica o por las definiciones mediante el paso al cociente. *La percepción* es la relación entre el objeto (sensible) y la imagen que tenemos de este. La Nyaya tiene una impronta práctica y empirista y por tanto no debería sorprender que le dé gran importancia a la percepción; sin embargo, no debemos pasar por alto el hecho de que para esta doctrina el intelecto también representa un sentido y es por tanto un medio de percepción.

Es un modelo argumentativo que permite interpretar en una única estructura tanto los aspectos vinculados con la conjetura (con fuertes referencias al uso de la analogía), como los aspectos vinculados con la deducción y el uso de ejemplos.

La *inferencia* es finalmente lo que se puede considerar "el silogismo nyaya" y tiene la siguiente estructura:

1. la *afirmación* (no demostrada); es la declaración de lo que se quiere demostrar;
2. *razón*;
3. la *proposición o enunciado general*, seguida de un ejemplo;
4. la aplicación, también llamada *segunda aserción*;
5. la *conclusión* (D'Amore, 2005, pp. 5-6).

En los siguientes párrafos examinamos las características de la argumentación nyaya, tratando de establecer cuáles son sus vínculos con el razonamiento deductivo y cómo se relaciona con la generalización y el uso de ejemplos en Matemática.

Argumentación Nyaya y el razonamiento deductivo

En este párrafo examinamos el esquema argumentativo nyaya recurriendo al análisis de las características de las proposiciones verbalizadas propuesto por Duval (1992-93; 2007). Para este propósito, consideramos la naturaleza de las proposiciones que están involucradas (o pueden estar involucradas) en una argumentación, la naturaleza de la inferencia a nivel local y la estructura del argumento a nivel global.

Duval (2007) distingue entre *contenido, valor y estatus* de una proposición verbalizada. La dimensión de *contenido* se refiere a los objetos del discurso y puede ser informativa (proporciona información sobre objetos o situaciones) o teórica (proporciona información sobre relaciones entre los objetos o las situaciones). La dimensión de *valor* se refiere a la relación de la proposición y lo que ésta enuncia. El valor de la proposición verbalizada puede ser epistémico (obvio, absurdo, posible, probable, etc.), lógico (verdadero, falso, indecidible) o comunicativo (orden, promesa, pregunta, etc.). Finalmente, la dimensión estatal de una proposición verbalizada se refiere a su relación con otras proposiciones verbalizadas en el discurso en su conjunto.

Veamos ahora cómo estas clasificaciones pueden ayudarnos a analizar la estructura del esquema argumentativo nyaya así como a interpretarlo tanto desde un punto de vista pragmático como desde un punto de vista deductivo.

Como ya se mencionó, nyaya es una lógica que surge con una intención especulativa y la argumentación que produce es de carácter pragmático, es decir, vinculada a la explicación racional de fenómenos que pueden caer bajo los sentidos. Sin embargo, las proposiciones involucradas en este tipo de argumentación son proposiciones cuya verdad (o falsedad) se pretende demostrar y, por tanto, tienen un valor de verdad lógico. Aunque su contenido es informativo, es importante señalar que en el modelo nyaya hay una referencia expresa a la necesidad de verdad (o de veracidad) y no sólo a un grado de plausibilidad de las premisas de la proposición involucrada (ver al respecto el penúltimo paso de la inferencia, el de la segunda afirmación).

Centrémonos ahora en la naturaleza de la inferencia desde el punto de vista local. Al tratarse de un modelo argumentativo con un fuerte vínculo con la realidad sensible, la implicación "si... entonces..." de la inferencia en cada una de las proposiciones es de tipo causal y no de tipo lógico (por tanto, no se trata de implicaciones materiales). Sin embargo, en la inferencia nyaya la verdad de la premisa se examina expresamente y este hecho permitiría una posible ampliación del significado a todos los casos de valores de verdad asignables a la premisa y por tanto al conectivo lógico "si… entonces" (D'Amore, 2001).

En nuestra opinión podemos afirmar que los enunciados tomados en consideración por el modelo argumentativo nyaya pueden tener un valor epistémico teórico y no sólo normativo; de hecho, en esta, la ley (o proposición) general *garantiza* efectivamente su valor de verdad.

Además, desde el punto de vista del papel de una proposición en cada paso inferencial, es posible notar cómo en el modelo nyaya esta tiene una tarea bien definida, en referencia a su acción como premisa, como conclusión o como un tercer enunciado (más precisamente como una generalización de lo particular).

Examinemos ahora el papel de una proposición en la organización global del discurso, es decir, en relación con otras proposiciones. A primera vista, siguiendo el análisis de Duval, se podría pensar que en el esquema nyaya las proposiciones tienen un estatus normativo (se hace referencia a opiniones autorizadas, etc.) y no teórico. Sin embargo, el hecho de que la argumentación nyaya considere entre los medios de conocimiento tanto el testimonio (con fuertes referencias a una autoridad trascendente) como la percepción no excluye que tales testimonios puedan tener el papel de axiomas en un sistema que hace referencia a un cierto tipo de racionalidad.

Por lo tanto, la argumentación nyaya representa una estructura argumentativa que nos permite atribuir un estatus teórico a las proposiciones involucradas, suponiendo que se establezca un sistema apropiado de racionalidad. Nada impide que esta racionalidad sea la de una teoría matemática. Finalmente, podemos notar la presencia de la clausura del "silogismo" en la argumentación nyaya, que en realidad no representa más que un ejemplo de la regla de "... modus ponens extendida al cálculo de predicados, una operación lógicamente correcta y esencial para el funcionamiento de ese silogismo…" (D'Amore, 2005, p. 7). Por tanto, la conclusión de un paso puede convertirse en la premisa del siguiente, creando así una estructura sin lagunas desde el punto de vista lógico.

Para la caracterización de la nyaya y su papel en el análisis de las proposiciones discursivas de los estudiantes nos remitimos a D'Amore (2005), donde se examinan los argumentos matemáticos espontáneos de estudiantes de secundaria, mostrando cómo estos a menudo reflejan una estructura muy similar a la nyaya.

El papel de la generalización y los ejemplos en el modelo argumentativo nyaya

Consideremos otros dos aspectos de la estructura argumentativa nyaya examinada aquí, que tienen cierta importancia tanto desde el punto de vista teórico como didáctico: el uso del concepto de generalización y el uso de ejemplos.

La generalización llevada a cabo en la formulación del enunciado general del esquema nyaya es claramente de carácter inductivo y no se explican claramente las reglas que se deben seguir para llevarla a cabo. Probablemente el concepto de generalización en el sistema de referencia nyaya sea muy diferente del de generalización en Matemática y se basa en un cierto número de ejemplos observados o hipotizables, que involucran los "medios de conocimiento" contemplados (ver al respecto D'Amore, 2005, también sobre ejemplos concretos de estudiantes que utilizan espontáneamente esta estructura argumentativa).

La inducción Nyaya es, naturalmente, completamente diferente del principio de inducción en Matemática, y quizás represente su aspecto "más débil", desde el punto de vista lógico en el sentido moderno. Sin embargo, también aquí nada nos impide imaginar, en este punto del esquema, el uso de una generalización lógicamente correcta, cuyo fracaso demostraría la falsedad de la proposición. Además, si examinamos detenidamente la estructura del modelo nyaya, podemos notar cómo el silogismo "verdadero", es decir, el que corresponde a un paso deductivo (asumiendo una generalización correcta), es sólo la última parte de la inferencia, mientras que los pasos anteriores sirven para que el sujeto se familiarice con lo que necesita demostrar. En este sentido, la generalización adquiere aquí el aspecto de una verdadera conjetura, nacida del examen de un número determinado de casos y, sobre todo, del examen de posibles analogías con otros casos ya conocidos. En el mismo sentido también podemos evaluar el hecho de que al inicio la posición de la tesis y la hipótesis están invertidas respecto al orden requerido en el razonamiento deductivo. Los pasos que preceden a la construcción del enunciado general representan, por tanto, una búsqueda experimental preliminar de los enunciados y de los conceptos que deben intervenir en el paso deductivo.

Finalmente, hagamos algunas consideraciones sobre el uso de ejemplos. Los ejemplos esencialmente no tienen relación con el razonamiento deductivo, mientras que se tienen en gran consideración en el razonamiento nyaya. Sin embargo, si examinamos la estructura del esquema nyaya, podemos observar que el ejemplo que se debe dar para respaldar la afirmación general no tiene un papel "vital" en la estructura: de hecho, podemos imaginar eliminar la referencia a ejemplos y, sin embargo, el razonamiento nyaya sería lógicamente correcto; de hecho, en esa filosofía el ejemplo tiene principalmente una función de anclar a la realidad, de limitar el razonamiento puramente especulativo.

Conclusiones

Con base en lo anterior, podemos afirmar que tras un análisis cuidadoso el modelo argumentativo nyaya revela una estructura muy versátil y llena de potencial desde el punto de vista didáctico. Es un modelo argumentativo que permite interpretar en una única estructura tanto los aspectos vinculados con la conjetura (con fuertes referencias al uso de la analogía), como los aspectos vinculados con la deducción y el uso de ejemplos. Por lo tanto, puede considerarse una herramienta adecuada para describir tanto argumentos pragmáticos como demostraciones reales, como lo demuestra la investigación propuesta por D'Amore (2005), en la cual tanto estudiantes que proporcionan una demostración aceptable, desde una perspectiva matemática, como estudiantes que aportan argumentos no válidos utilizan espontáneamente el modelo nyaya.

Referencias bibliográficas

Asenova, M. (2022). Non-classical approaches to logic and quantification as a means for analysis of classroom argumentation and proof in mathematics education research. *Acta Scientiae, 24*(5), 404–428. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7405

Asenova, M. (2023). An Epistemic-Logical Model for Analysis of Students' Argumentation in Mathematics Education Research. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME13) (pp. 56–63). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education PME-XX* (Vol. 2, pp. 121–128). Valencia: PME.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate. *International Newsletter on the Teaching and Learning on proof*. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html.

D'Amore, B. (2001). *Scritti di Epistemologia Matematica*. 1980-2001. Pitagora. Nueva edición: 2023, Bonomo].

D'Amore, B. (2005). L'argomentazione matematica di allievi della scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*, *19*(4), 481-500.

Durrand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay D. (2012). Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. In G. Hanna & M. de Villers (Eds.), Proof and Proving in Mathematics Education, The 19th ICMI Study (pp. 349-368). Springer.

Duval, R. (1992-93). ¿Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*. 31, 37-61. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, *10*(2), 1996, 130-152; aparece también como primer volumen en la serie Bologna-Quéretaro, Pitagora].

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes of proof. In: Boero P. (Ed.) (2007). *Theorems in schools*. 137-161. Sense.

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma: http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/prot7734_12

Stylianides, A.J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321. http://www.jstor.org/stable/30034869

Notas

Este texto es una versión ampliada e traducida del italiano de: Asenova, M. (2016). Ragionamento deduttivo e modello argomentativo nyaya. En M. Iori (Ed.), *Atti del Convegno "La matematica e la sua didattica", in onore dei 70 anni di Bruno D'Amore, 8 octubre, 2016, Bologna* (pp. 61-65). Pitagora.

[1] Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna. PhD en Mathematics Education. Free University of Bozen-Bolzano.

Conciencia semiótica en la construcción del objeto matemático “infinito”

Héctor Mauricio Becerra Galindo [1]

Resumen

En este artículo se presentan algunos casos empíricos de la tesis doctoral sobre las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente, que surge de la falta de *conciencia semiótica*, conocimiento consciente sobre los sistemas de representaciones que se movilizan en la actividad matemática y que es específica de la semiótica, que presentan los docentes en la construcción cognitiva del objeto matemático “infinito” y “conjuntos infinitos”.

Palabras clave: conciencia semiótica, representaciones semióticas, problemas semióticos, conjuntos infinitos, enseñanza-aprendizaje.

En homenaje a nuestro grande investigador, maestro y precursor de la Didáctica de la Matemática Guy Brousseau (1933-2024):

> La tarea de dar una primera obra de síntesis sobre la didáctica de la matemática era una tarea importante pero difícil y delicada […] Usted la cumplió de manera brillante.
>
> Otro mérito de su obra es el hecho de constituir una base indispensable para avanzar en el estudio de la didáctica de las diferentes nociones matemáticas: el número, el álgebra, la geometría, la estadística, etc. […]
>
> Una vez más lo felicito -pero que digo, le agradezco- por hacer conocer y vivir la didáctica de la matemática, y le deseo un gran éxito a sus elementos. (D’Amore, 1999/2006, p. 14; Carta de Brousseau a D’Amore del 08 de octubre de 1999).

Las diferentes investigaciones que se han realizado sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979; Duval, 1983; Moreno & Waldegg, 1991; Arrigo & D’Amore, 1999, 2002; Tsamir, 2000; Arrigo, D’Amore & Sbaragli, 2011; Becerra Galindo, 2020) evidencian dificultades en los estudiantes respecto a su construcción cognitiva. Estas dificultades están asociadas a la dificultad objetiva de los estudiantes frente a le temática del infinito (que constituye un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1983)) como se concluye en la investigación de Arrigo, D’Amore y Sbaragli (2011), y a la temática general de la formación de una noética frente a representaciones semióticas como es propuesto por Duval (1993, p. 38, en la traducción D’Amore, 2002) “(…) de un parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos” (paradoja de Duval), y que es consolidado por Duval (1995/1999, p. 15) con su hipótesis “no hay noesis sin semiosis”.

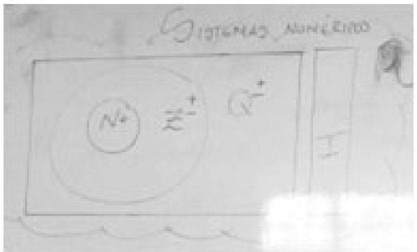
A continuación, se documentan casos empíricos de algunos problemas semióticos y la falta de *conciencia semiótica* que presentan los docentes al elegir las representaciones para la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos.

Representación auxiliar

La docente D_{21} propone a sus estudiantes de grado once (11°) la representación auxiliar de la figura 1, para explicar los conjuntos de los números reales, después de la clase se indaga a sus estudiantes lo aprendido en la clase de la docente $D_{21,}$ generándose, entre otras, las representaciones auxiliares de la figura 2 y 3.

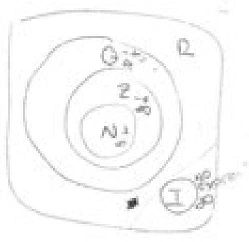
> […] como raza humana, conocemos la representación de los números reales desde los números racionales y números irracionales, lo que se salga de ahí hasta ahora es desconocido, el que sea desconocido no significa que no exista.

Figura 1. Representación auxiliar del conjunto de los números reales D_{21}.



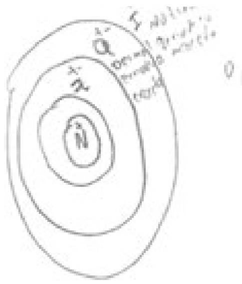
Fuente: Docente D_{21} (2019).

Figura 2. Representación auxiliar del conjunto de los números reales E_{24}.



Fuente: Estudiante E_{24} (2019).

Figura 3. Representación auxiliar del conjunto de los números reales E_{24}.



Fuente: Estudiante E_{25} (2019).

En este caso específico de la elección de la representación auxiliar de los conjuntos numéricos por parte de la docente D_{21} (figura 1), se presenta una problemática semiótica desde el "saber matemático" (Becerra Galindo, 2017, 2018, 2020, 2021, 2023; Becerra Galindo & Font, 2019), ya que al elegir la representación auxiliar del libro de texto Aciertos matemáticos 8 (Dueñas, Garavito & Lara, 2007), la docente D_{21} no realiza un análisis crítico a nivel semiótico y sólo opta por tomar la transposición didáctica elegida por el autor del libro asimilándose a este (Arrigo et al., 2011).

> En la entrevista hecha a la docente D_{21} se evidencia totalmente los problemas y dificultades con la representación auxiliar, así:
>
> […] [63]: Qué pasaría si un estudiante pregunta: Si yo tengo un punto [se señala con un punto negro en la representación auxiliar del conjunto R, figura 2] en este espacio, ¿Qué número es?; la docente D21 responde [64]: "Yo le podría decir que es un número real, que no hace parte de los números irracionales, ya que no está adentro del conjunto, que no hace parte de los números racionales, porque no está dentro de la representación de los números racionales, y que el hombre todavía no lo conoce, porque losss [titubea], nosotros mismos como seres humanos, como raza humana, conocemos la representación de los números reales desde los números racionales y números irracionales, lo que se salga de ahí hasta ahora es desconocido, el que sea desconocido no significa que no exista" [en conversaciones anteriores establecía que este punto era un número imaginario]. (Becerra Galindo, 2020, pp. 285-286)

Con respecto a la figura 3, cuando se le pregunta a la docente D_{21} por la representación auxiliar de la estudiante E_{25} establece que: "Es una representación que no sirve para la construcción de los números reales (), porque los números irracionales () no contienen a los números racionales ()" (Becerra Galindo, 2020, p. 216); además, la docente $D_{21,}$ al ver las representaciones y escuchar los audios de sus estudiantes, argumenta que

> […] "no existe una claridad en la representación de los números irracionales, ya que los estudiantes presentan mucha confusión en el número irracional como interseco o no, como que está aparte, pero no, a

veces como que lo meten con los números racionales, y aunque está a parte de los números racionales, lo ponen al mismo nivel de los números reales”. (Becerra Galindo, 2020, p. 216)

Con respecto a la conceptualización del infinito a partir de las representaciones realizadas por los estudiantes, se realiza la siguiente pregunta a la docente D_{21}: ¿La infinidad la representa la recta, el ocho acostado y los conjuntos? ella argumenta que

> “En los conjuntos no [señala la representación auxiliar de los conjuntos realizada por ella, figura 1]. O sea, si yo represento los números enteros con una , se entiende todo lo que se sabe, incluyendo a los estudiantes, si la representa el gran sistema de los números enteros y es infinito, pero si esta representación [nuevamente señala su representación auxiliar, figura 1] representa infinidad, para mí [la docente se queda pensando un tiempo], pues sabe que si podría representar un conjunto infinito, porque es que si se habla de , se hablaría de enteros y los números enteros son un conjunto infinito; sin embargo, la infinidad es mucho más clara en la recta, pero ahora que reflexiono, pues el solo hecho de ver la , implica una infinidad, porque se está representando un conjunto que es infinito”. (Becerra Galindo, 2020, pp. 219-220)

En este caso, la docente D_{21} inicialmente afirma que en la representación auxiliar de los conjuntos no existe la infinidad y no sería una representación de un conjunto infinito, pero después de evidenciar que “ representa el gran sistema de los números enteros y es infinito”, la docente D_{21} se da cuenta que la representación auxiliar de conjunto es una representación de un conjunto infinito, porque los números enteros son un conjunto infinito; pero en este caso la docente D_{21} define al conjunto infinito como “Aquel que tiene infinitos elementos que hacen parte de él” (Becerra Galindo, 2020, p. 220), esta interpretación está relacionada con el infinito potencial, que no permite la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos que necesita un infinito actual.

A partir de la evidencia, discusión y análisis respecto a la representación auxiliar de los conjuntos numéricos, que es un pequeño ejemplo del análisis cualitativo de la tesis doctoral (Becerra Galindo, 2020), se evidencia que la docente D_{21} no cuenta con los elementos necesarios desde la semiótica para realizar un análisis crítico en la elección de la representación auxiliar de los conjuntos numéricos, lo que lleva a generar dificultades en el aprendizaje de sus estudiantes sobre la conceptualización del conjunto de los números reales y los conjuntos infinitos, que se evidencia en las representaciones de las figura 2 y 3 realizadas por sus estudiantes, además de la conceptualización del infinito que presenta la docente.

Representación simbólica

El docente D_{11} propone a sus estudiantes de grado noveno (9°) la representación simbólica de la figura 4, para explicar los conjuntos de los números reales, después de la clase se indaga a sus estudiantes lo aprendido en la clase del docente D_{11}, generándose, entre otras, las representaciones simbólicas de la figura 5 y 6.

Figura 1. Representación auxiliar del conjunto de los números reales D_{21}.

Fuente: Docente D_{21} (2019).

Figura 2. Representación auxiliar del conjunto de los números reales E_{24}.

Fuente: Estudiante E_{24} (2019).

Figura 3. Representación auxiliar del conjunto de los números reales E_{24}.

Fuente: Estudiante E_{25} (2019).

Inicialmente, se muestra al docente D_{11} un segmento de video de la entrevista hecha a los estudiantes sobre el tipo de representación que ellos realizan de forma simbólica (figura 5 y 6), el docente se centra en la información del siguiente fragmento de la entrevista hecha a sus estudiantes:

> […] el investigador pregunta ¿Cuál es la diferencia de los puntos suspensivos en 0,33… y 3,14968…?; E_{11} responde: “Que en el número 3,14968… los puntos suspensivos son números que no se repiten y en 0,333… en los puntos suspensivos se repite el mismo número, y por eso le pongo la raya”, entonces le pongo los puntos y la raya, E_{11} responde: “Sí, le pongo los puntos y la raya, los puntos significa que este se repite infinitamente y este de acá [señala 3,14968…] no porque este no se repite”, se pregunta ¿No dice que es infinito?, E_{11} responde: “Sí, pero no se repite”. (Becerra Galindo, 2020, p. 159)

El docente D_{11} al ver y escuchar la discusión de los estudiantes de los puntos suspensivos establece que hay un error didáctico, así: “Sin embargo, ahí está el error didáctico de los tres puntos que uno no lo explica” (Becerra Galindo, 2020, p. 159), refiriéndose a los puntos suspensivos como infinitos pero que en las representaciones decimales se comportan de forma diferente como el caso de 0,33… y 3,14968…, además, de si se pone la raya y los puntos suspensivos en el que se repite infinitamente.

Siguiendo con la entrevista, se le explica al docente D_{11} que este fragmento de la entrevista se refiere a la diferenciación entre los números racionales e irracionales y lo que ocurre con los puntos suspensivos, el docente D_{11} afirma:

> “Me quedé con la pregunta, si se repite los números del decimal 3,14322450 [video minuto 3:30] en caso de los números irracionales ¿Qué pasa?, sí, yo veo que no se van a repetir, pero entonces los dígitos son 14322450, si ellos ven que es la secuencia, ya, si o si es un número que no se puede volver a repetir, porque entonces tendrían unos números limitados, sí, entonces sería un decimal exacto” (Becerra Galindo, 2020, p. 160)

Por último, se le pregunta al docente D_{11} si este tipo de representaciones son abordadas en clase, el docente D_{11} reflexiona y afirma: “Interesante la parte de los tres puntos, no lo había tenido en cuenta en la clase” (Becerra Galindo, 2020, p. 160).

En este apartado de la entrevista, el docente D_{11} reconoce que no aclara lo de los puntos suspensivos, que comete este tipo de errores (didácticos) dando por hecho que los estudiantes lo comprenden y no tiene en cuenta las diferentes representaciones de los puntos suspensivos en la clase, por lo tanto, es evidente, que los estudiantes no tienen claridad de lo que significan los puntos suspensivos en las representaciones decimales, generando dificultades y errores (como lo establece el docente D_{11}).

Estos dos ejemplos de casos empíricos sobre la *conciencia semiótica*, de muchos otros, para la construcción del objeto matemático conjunto infinito, nos permite establecer que los docentes presentan una falta de *conciencia semiótica* cuando:

— No presentan, discuten y reflexionan en clase sobre las representaciones auxiliares y simbólicas, que eligen y las realizadas por sus estudiantes, para construir y obtener las correctas representaciones del conjunto de los números reales y de los conjuntos infinitos.

— No reconocen los problemas semióticos, en las representaciones elegidas, que no permiten la construcción conceptual de los números reales, ni de los conjuntos infinitos, ratificando una vez más la hipótesis de Duval (1995/1999) "no hay noesis sin semiosis".

— No realizan un análisis epistémico, ni histórico sobre el objeto matemático infinito y conjuntos infinitos, para su conceptualización, como es propuesto en el trabajo pionero de Guy Brousseau (1986) donde establece que no solo los estudios en historia, sino los de epistemología de la matemática son importantes porque contribuyen a la práctica educativa y a la investigación en educación matemática.

Referencias bibliográficas

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación matemática*, *11*(1), 5-24.
Arrigo, G., & D'Amore, B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo…", secunda parte. Ancora su ostacoli epistemologic e didattici al proceso di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*, *10*(1), 4-57.
Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti*. Erickson. [Versión en idioma español: (2011). *Infinitos infinitos*. Magisterio].
Becerra Galindo, H. M. (2017). Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 191-201.
Becerra Galindo, H. M. (2018). Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos. *II congreso de educación matemática de américa central y el caribe [II CEMACYC]*, 1-8.
Becerra Galindo, H. M. (2020). *Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. [https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2021/02/Hector-M-Becerra-G-Tesis-doctoral.pdf]
Becerra Galindo, H. M. (2021). Manifestazioni della coscienza semiotica degli insegnanti nell'insegnamento degli insiemi infiniti. In B. D'Amore (Ed.) (2021). *La didattica della matematica: riflessioni teoriche e proposte concrete. Atti del Convegno Incontri con la matematica n. 35*, Castel San Pietro Terme (Bo), 5-6-7 novembre 2021, pp. 175-176. Pitagora.
Becerra Galindo, H. M. (2023). La conciencia semiótica a partir de los problemas semióticos en la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos. *Memorias del III Simposio de Educación Matemática Virtual – III SEM V, "Nuevos paradigmas en la post - pandemia en Educación matemática", Tomo I, mayo 2022*. Universidad Nacional de Luján.
Becerra Galindo, H. M., & Font, V. (2019). Las problemáticas semióticas y la metáfora en las representaciones de los conjuntos infinitos. *Revista Acta latinoamericana de matemática educativa [ALME]*, *32*(1), 531-540.
Brousseau, G. (1983). Ostacles Epistemologiques en Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165-198.
D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. Primer Premio Absoluto "Lo Stilo d`Oro", sección Didáctica, X Edición del Premio Nacional de Pedagogia Pescara. [Versión en idioma español: 2006, Bogotá: Magisterio].
D'Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. Revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, *11*(1), 63-71.
D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Magisterio.
Dueñas, W., Garavito, A, & Lara, G. (2007). *Aciertos matemáticos 8*. Grupo Editorial Educar.
Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objects mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(4), 385-414.
Duval, R. (1993). Registres de Répresentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitive*, *6*(5), 37-65.
Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. [Versión en idioma español: (1999). *Sémiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle].
Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Universidad del Valle.
Duval R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En: L. Radford, G. Schubring, & E. Seeger (Eds) (2008). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture*. Sense Publishers. Pp. 39-61.
Duval, R. (2017*). Understanding the mathematical way of thinking-the registers of semiotic representations*. Springer.
Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
Fishbein, E., Tirosch, D., & Hess, P. (1979). The intuitions of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3-40.
Moreno, L., & Walddeg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Education Studies in Mathematics*, *22*(3), 211-231.
Tsamir, P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*, *14*(2), 167-207.

Nota

Agradezco al PhD Bruno D'Amore y a la PhD Martha Fandiño por su apoyo incondicional en mi formación doctoral.
Agradezco a los docentes y a los estudiantes de los grados 9° y 11° del colegio Tomás Cipriano de Mosquera (IED) y de la República Bolivariana de Venezuela (IED), por su participación en esta investigación.

[1] Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna. PhD in Mathematics Education. Secretaria de Educación del Distrito, Colegio Tomás Cipriano de Mosquera, Bogotá D.C.

Cambio de concepciones de un grupo de profesores de matemáticas sobre el diseño de situaciones de aprendizaje de la proporcionalidad en un curso de formación continuada

Luis Ángel Bohórquez Arenas[1], Paola Balda Álvarez[2]

Resumen

En este artículo presentamos una breve revisión actualizada sobre las creencias y concepciones de los profesores de matemáticas y sus cambios en cursos de formación continuada. Asimismo, mostraremos algunos resultados parciales de un proceso de formación de profesores, desarrollado en el marco de una estancia postdoctoral, en donde observamos cambios en sus concepciones sobre el diseño de situaciones para el aprendizaje de la proporcionalidad. Los datos provienen de una propuesta de trabajo basada en la socioepistemología que pretendía generar discusiones sobre el rediseño del discurso Matemático Escolar (dME) en estudiantes de maestría.

Palabras clave: creencias y concepciones, cambio de concepciones, socioepistemología, formación de profesores y proporcionalidad.

Introducción

En muchas investigaciones sobre las creencias y concepciones (Bohórquez & D'Amore, 2018; Bohórquez, 2013, 2014, 2020; Calleja, 2022; Lau, 2022; Swan & Swain, 2010) se encontró que algunos autores manejan los términos creencias y concepciones como sinónimos. Sin embargo, otros autores señalan que son diferentes tipos o niveles de conocimiento y que por lo tanto forman parte del conocimiento profesional del profesor. Contreras y Climent (1999), por ejemplo, consideran que el término creencias ha tenido (y tiene) diferentes usos y significados: creencias, sistema de creencias, reflexiones a priori, ideologías y teorías implícitas. En la actualidad existen diversas consideraciones sobre los términos creencias y concepciones (Bahçivan & Aydin, 2020; Calleja, 2022; Luft et al., 2022; Vesga-Bravo et al., 2022) y se han presentado propuestas sobre el cambio concepciones y su relación con la práctica.

Las creencias

El término "creencias" proviene del latín "credére" (Bohórquez, 2014, 2016) y se define como "tener por cierto una cosa que el entendimiento no alcanza o que no está comprobada o demostrada" (RAE, 2001). Sobre las creencias Shulman et al. (1989) establecen que son más discutibles que el conocimiento y están más abiertas al debate. Estos autores afirman que las creencias del profesor son de dos tipos dependiendo de si están referidas a la matemática como disciplina científica (que influyen en el contenido que se enseña y en la forma de enseñarlo) o a la matemática como objeto de enseñanza-aprendizaje (que influirán en la orientación que el profesor da a la materia que enseña).

Thompson (1992) estableció que una característica fundamental de las creencias es que pueden considerarse según la variación en el grado de convicción, pues quien cree puede arraigarse a su punto de vista o por otro puede considerar una afirmación de un asunto como más probable o no. De igual manera, esta autora afirma que las creencias, usualmente, incluyen sentimientos afectivos y evaluaciones, memorias de experiencias personales vividas, supuestos sobre la existencia de entidades y mundos alternativos los cuales no son abiertos a la evaluación externa o examinación crítica. Thompson (1992) asegura que las creencias no están consensuadas, independientes de su validez y están caracterizadas por una falta de acuerdo sobre cómo son evaluadas y juzgadas.

Las concepciones

Ponte (1994) estableció que las concepciones pueden considerarse el fondo organizador de los conceptos y que se constituyen como "mini-teorías". Este autor, consideró que las concepciones condicionan la forma de abordar las tareas y ligadas a ellas están las actitudes, las expectativas y el entendimiento que cada sujeto tiene de lo que constituye su papel en una situación dada.

García et al. (2006) establecieron que las concepciones de los docentes son una estructura que cada profesor de matemática da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos a sus estudiantes. Estos autores consideran que algunas características de las concepciones del profesor forman parte del conocimiento y actúan como filtros en la toma de decisiones e influyen en los procesos de razonamiento. Pehkonen (2006), por su parte, relaciona las creencias con las concepciones. Este autor, define las concepciones como las creencias conscientes. De esta manera, las concepciones forman un subgrupo de las creencias (Pehkonen, 2006).

Cambio de las concepciones de los profesores de matemáticas y su relación con las prácticas

Calleja (2022) encontró que la interacción entre las creencias y prácticas de los profesores de matemática se han investigado ampliamente. Estas investigaciones se han centrado en examinar cómo las concepciones de los profesores sobre la matemática, la enseñanza y el aprendizaje cambian cuando participan en el desarrollo profesional continuo (DPC). Varios autores indican que las iniciativas de DPC a menudo intentan desarrollar las prácticas de los docentes en el aula para mejorar el aprendizaje de los estudiantes y, en el proceso, recopilar datos sobre las concepciones de los profesores de matemática durante su experiencia de DPC. Ejemplo de este tipo de investigaciones son las de Polly et al. (2014); Swan y Swain, (2010) y Tuan et al. (2017).

Tuan et al. (2017) aseguran que los profesores deben sentirse insatisfechos con sus concepciones sobre la enseñanza, deben tener tiempo para experimentar nuevas concepciones de forma poder comprenderlas y encontrar oportunidades para practicar personalmente con estas concepciones de la enseñanza de las matemáticas. Además, de la posibilidad de verificar si estas concepciones sobre la enseñanza son más fructíferas y útiles. Esta perspectiva de cambio de concepción del aprendizaje de los docentes es similar al modelo de cambio conceptual (CCM) originado por Posner et al. (1982).

Los estudios de Calleja (2022), Tuan et al. (2017), de Polly et al. (2014), Caner et al., (2013) y Laferrière et al. (2006) han indicado que combinar enfoques presenciales y basados en la web (mediados o virtuales) pueden crear un entorno poderoso para que los docentes mejoren sus prácticas docentes. Estos estudios justifican que diseñáramos una propuesta de formación continuada de profesores que vinculara sesiones presenciales, mediadas por la plataforma Zoom y la creación de un espacio virtual de almacenamiento de tareas, documentos y grabaciones de las sesiones.

El diseño del espacio de formación continuada se fundamentó en los principios de la teoría socioepistemológica, la normatividad de la práctica social, la posibilidad de generar nuevos caminos de construcción social del conocimiento matemático (Balda, 2022), entre otros aspectos. El principio fundamental de este espacio era que los profesores cambiaran su relación con el saber en la búsqueda de reconocer otras posibilidades de implementación en su práctica. El CDP lo conformaron 12 sesiones (6 presenciales y 6 remotas) con 10 profesores en ejercicio que realizan la maestría en Educación (énfasis en educación matemática) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Análisis y resultados

Diseño inicial propuesto por los profesores

En la primera sesión de clase se les pidió a los profesores que diseñaran una situación de aprendizaje de la proporcionalidad. Estos diseños iniciales presentados por los profesores del curso se evidenció una amplia influencia de lo establecido en el discurso Matemático Escolar habitual. Una de las planeaciones propuesta por el grupo A, se presenta a continuación.

Inicio:

1. Se inicia la clase preguntando a los estudiantes: ¿Qués ignifica que dos cosas son proporcionales?
2. Se presentan ejemplos de situaciones de la vida diaria en las que se observa la proporcionalidad como:
   - Si compro 2 manzanas por $1.000, ¿cuánto costarán 4 manzanas?
   - Si un carro recorre 100 kilómetros en 1 hora, ¿cuántos kilómetros recorrerá en dos horas?
   - Se les pide a los estudiantes que identifiquen la variable dependiente y la variable independiente en cada ejemplo.

Desarrollo:

1. Se divide la clase en grupos pequeños y se le entrega a cada grupo una actividad diferente para resolver.
2. Las actividades pueden ser:
   - Completar una tabla de proporcionalidad.
   - Graficar una situación de proporcionalidad.
   - Resolver un problema de proporcionalidad.
3. Los grupos trabajan en equipo para resolver las actividades y luego presentan sus resultados al resto de la clase.

Conclusión:

1. Se realiza una lluvia de ideas para resumir los concepos aprendidos sobre la proporcionalidad.
2. Se les pregunta a los estudiantes: ¿En qué otras situaciones de la vida diaria podemos encontrar la proporcionalidad?
3. Se asigna una tarea para realizar en casa como:
   — Buscar ejemplos de proporcionalidad en periódicos o revistas.
   — Inventar un problema de proporcionalidad y resolverlo.

Fuente propia, *Diseño inicial de los profesores grupo A*

En el diseño presentado por los profesores del *grupo A* las actividades son muy similares a los diseños habituales. Las preguntas propuestas priorizan la memorización y los problemas (en realidad ejercicios) no introducen al estudiante al desarrollo del pensamiento proporcional y posiblemente no permitan el tránsito por diversas formas de pensamiento.

Diseño final propuesto por los profesores

Los profesores hicieron un análisis de las dimensiones del saber durante el desarrollo del curso. En la reflexión que hicieron al contrastar su práctica con el instrumento que les fue entregado sobre modelos del pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini, 2016) indagaron acerca del surgimiento de la noción de proporción. También, analizaron cómo la noción de proporción vivía en ciertas culturas y aunque difería de lo propuesto por Euclides coincidía en la idea de reconocer a la comparación como emergente social permanente en todos los contextos, esto con relación a la dimensión epistemológica.

En cuanto a la dimensión social los profesores tuvieron en cuenta la propuesta de Balda (2022). Esto les permitió que vieran la idea de planeación de una manera más amplia por medio de un cambio de relación con el saber. Esto se pudo evidenciar en la sesión 6 en donde los profesores discutían sobre sus diseños iniciales y lo que hacían hasta ese momento.

Profesora A: *Hicimos un análisis a través de las diferentes dimensiones* [propuestas en la socioepistemologia y descritas en Balda (2022)], *pero, por ejemplo, también buscamos como planeaciones que se hayan hecho para ver qué estructura era, porque nosotros lo planeamos como momentos, y decíamos como que, entonces, ¿cómo realizamos esto?* […] *Entonces, como que buscamos algunos referentes en los que ya se hubiera tratado* […].

Profesora B: […] *nosotros también comenzamos a mirar, como pensando directamente desde una situación significativa, y desde ahí cómo íbamos a entrelazar las demás dimensiones, entonces ahí empezamos a mirar, bueno, ¿qué deberíamos empezar? ¿qué es lo que queremos ver en los estudiantes? Entonces, decíamos, bueno, iniciamos con lo de comparar, y ahí vamos avanzando y así nos vamos haciendo que ellos vayan avanzando en los modelos y en los pensamientos proporcionales* [...]

Profesora C: *Pero ¿cómo comenzarnos a preguntar? ¿y esto qué errores epistemológicos puede hacer un niño? ¿o qué cosas puede ser que no estemos viendo que es importante colocar y ver y analizar desde lo dialéctico, desde lo epistemológico? Y también, por ejemplo, queríamos ver de qué forma estaba ese objeto matemático en la aplicación en un contexto, ¿sí? De la vida cotidiana.*

En discusión anterior es posible observar que la problematización dio una mirada más amplia al proceso de planeación. Los participantes presentaron propuestas robustas con momentos que buscaban un tránsito entre los diferentes modelos de pensamiento proporcional determinados por procesos factuales y procedimentales hasta llegar a la resignificación.

Reflexiones finales

En esta investigación partimos de la idea socioepistemológica de asumir que es necesario el estudio de la naturaleza del saber matemático enseñado como problemática principal para atender a un cambio significativo en los procesos de planeación. Coincidimos con Calleja (2022) en que es posible cambiar las concepciones de los profesores sobre las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje cuando participan en el desarrollo profesional continuo (DPC).

Referencias bibliográficas

Bahçivan, E., & Aydin, Y. (2020). Pre-service Science Teachers' Teaching Beliefs: Responding to 'Which', 'How' and 'Why' Questions. *Action in Teacher Education*, *42*(2), 120–136. https://doi.org/10.1080/01626620.2019.1650842

Balda, P. (2022). Estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico. *Investigación e Innovación En Matemática Educativa*, *7*, 1–24. https://doi.org/10.46618/iime.148

Bohórquez Arenas, L. Á., & D'Amore, B. (2018). Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 85–103. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.228

Bohórquez, L. Á. (2013). Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas. En A. Ramírez & Y. Morales (Eds.), I CEMACYC (pp. 1–40). CEMACYC. http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/126-506-3-DR-C.pdf

Bohórquez, L. Á. (2014). Las creencias vs las concepciones de los profesores de matemáticas y sus cambios. En: *Memorias Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, innovación y Educación* (pp. 1–27). OEI. http://www.oei.es/congreso2014/contenedor.php?ref=memorias

Bohórquez, L. Á. (2016). Cambio de concepciones de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas [Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://hdl.handle.net/11349/5313

Bohórquez, L. Á. (2020). Concepciones sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y sus cambios en estudiantes para profesor en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas. Universidad Distrital. https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/concepciones_sobre_la_gestion_del_proceso_de_ensenanza-aprendizaje_y_sus_cambios_en_estudiantes_para_profesor_en_ambientes_de_aprendizaje_fundamentados_en_la_resolucion_de_proble

Calleja, J. (2022). Changes in mathematics teachers' self-reported beliefs and practices over the course of a blended continuing professional development programme. *Mathematics Education Research Journal*, *34*(4), 835–861. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00366-x

Caner, M., Yüksel, I., & Keçik, İ. (2013). A New Trend in Teacher Education: A Web-Enhanced Methodology Course. Procedia - *Social and Behavioral Sciences*, 70, 1831–1838. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.01.260

Contreras, L. C., & Climent, N. (1999). La formación de profesores de matemáticas. Estado de la cuestión y líneas de actuación. Universidad de Huelva.

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), *9*(1), 85–116. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000100005

Laferrière, T., Lamon, M., & Chan, C. K. K. (2006). Emerging E-Trends and models in teacher education and professional development. *Teaching Education*, *17*(1), 75–90. https://doi.org/10.1080/10476210500528087

Lau, W. W. F. (2022). Predicting Pre-service Mathematics Teachers' Teaching and Learning Conceptions: The Role of Mathematical Beliefs, Mathematics Self-efficacy, and Mathematics Teaching Efficacy. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(6), 1141–1160. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10204-y

Luft, J. A., Navy, S. L., Wong, S. S., & Hill, K. M. (2022). The first 5 years of teaching science: The beliefs, knowledge, practices, and opportunities to learn of secondary science teachers. *Journal of Research in Science Teaching*, *59*(9), 1692–1725. https://doi.org/10.1002/tea.21771

Pehkonen, E. (2006). What Do We Know about Teacher Change in Mathematics? En L. Häggblom, A.-S. Röj-Lindberg, & L. Burman (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist Vol. 1* (pp. 77–87). Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten, Specialutgåva.

Polly, D., Wang, C., McGee, J., Lambert, R. G., Martin, C. S., & Pugalee, D. (2014). Examining the Influence of a Curriculum-Based Elementary Mathematics Professional Development Program. *Journal of Research in Childhood Education*, *28*(3). https://doi.org/10.1080/02568543.2014.913276

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teacher's profesional knowledge. En J. P. Da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII* (pp. 195–210). PMEXVIII. http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm#Concepcoes, conhecimento profissional e praticas profissionais

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education*, *66*(2), 211–227.

Reyes-Gasperini, D. (2016). Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa. [Tesis de Doctorado]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Shulman, L. S., Grossman, P., & Wilson, S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. En M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher*. Pergammon.

Swan, M., & Swain, J. (2010). The impact of a professional development programme on the practices and beliefs of numeracy teachers. *Journal of Further and Higher Education*, *34*(2), 165–177. https://doi.org/10.1080/03098771003695445

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Reseach on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127–146). National Council of Teachers of Mathematics.

Tuan, H. L., Yu, C. C., & Chin, C. C. (2017). Investigating the Influence of a Mixed Face-to-Face and Website Professional Development Course on the Inquiry-Based Conceptions of High School Science and Mathematics Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(8), 1385–1401. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9747-5.

Vesga-Bravo, G.-J., Angel-Cuervo, Z.-M., & Chacón-Guerrero, G.-A. (2022). Beliefs About Mathematics, Its Teaching, and Learning: Contrast Between Pre-service and In-service Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(4), 769–791. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10164-3

Notas

[1] Profesor Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas DIE-UD.

[2] Postdoctorado en Educación Matemática, DIE-UD Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Práctica del dibujo y aprendizaje de la geometría:

el caso italiano

Giorgio Bolondi[1]

Resumen

Se hacen algunas consideraciones acerca de las relaciones entre la enseñanza de la geometría y la enseñanza del dibujo, tanto desde una perspectiva cultural como desde el aspecto didáctico.

Palabras clave: didáctica del dibujo, didáctica de la geometría, relaciones entre dibujo y geometría.

La relación entre la práctica del dibujo y el aprendizaje de la geometría puede contemplarse desde diferentes perspectivas, como ocurre con todas las cuestiones relativas a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática.

A lo largo de los años se han propuesto diversos marcos teóricos para investigar el papel de las figuras, su percepción y su realización. Basta con mencionar aquí los nombres de Raymond Duval, Colette Laborde, Ephraim Fischbein, Jill Larkin, Patricio Herbst y muchos otros, por no hablar de los ingenuos primeros intentos de los Van Hiele y otros precursores.

A continuación, las reflexiones de los docentes y las experiencias de los profesores se entrelazan en contextos nacionales y locales específicos, con la elaboración de planes de estudios, la producción de materiales y la formación de profesores. El caso italiano es emblemático para la relación entre dibujo y geometría.

El problema es especialmente importante hoy en día, porque la práctica del dibujo geométrico se ha visto revolucionada por la aparición de programas informáticos de geometría dinámica, desde los primeros *Cabri* o *Cinderella* hasta el hoy hegemónico *Geogebra*, por no hablar de herramientas más avanzadas. También podemos imaginar que las nuevas herramientas (impresoras y bolígrafos 3D, creación y manipulación de imágenes virtuales, uso de la inteligencia artificial, ...) intervendrán cada vez más en este escenario.

En Italia, por ejemplo, el dibujo geométrico suele enseñarlo el profesor de educación técnica o de dibujo, y no el de matemática. Por supuesto, las técnicas informáticas también las enseña un profesor específico. Integrar o incluso simplemente reunir enseñanzas (y profesores) de áreas diferentes nunca es fácil.

Las finalidades de la enseñanza son diferentes: por ejemplo, la idea de *construcción aproximada* es muy diferente para el profesor de técnica que para el de matemática. El dibujo en perspectiva requiere (e históricamente ha contribuido a crear) una geometría muy refinada y muy interesante, pero el alumno apenas se encuentra con esta en las clases de matemática: la *geometría del espacio* en Italia se abandona muy pronto.

Así pues, merece la pena estudiar el caso de cómo ha evolucionado en Italia el debate sobre la relación entre geometría y diseño. Una primera consideración es que la enseñanza de la matemática en las escuelas italianas siempre ha ido acompañada de debates, a veces muy acalorados, sobre las cuestiones básicas relativas a la geometría: ¿geometría del plano y/o geometría del espacio? ¿Métodos analíticos o métodos sintéticos? ¿Herramienta de trabajo o camino para la formación del pensamiento?

Estas preguntas, a su vez, apuntan a otra aún más general: ¿cuál es la razón de ser de la enseñanza de la geometría? La elección de los “padres fundadores” (grandes matemáticos como Luigi Cremona, Francesco Brioschi, Luigi Casorati y otros) fue reservar a la geometría un papel exclusivamente *formativo* en el liceo clásico (la punta de la pirámide en la que se organizaba la escuela), y asignarle un papel *instrumental* a medida que se “descendía” en la escala escolástica.

Desde el inicio de la historia de las escuelas italianas, también se ha trazado una clara línea divisoria, a partir de los diez años de los alumnos, en los planes de estudio y en la práctica, entre las escuelas denominados gimnasios-liceos y las escuelas técnicas. La diferencia de objetivos se traduce en una diferencia de planes de estudios, pero también en una diferencia de técnicas de enseñanza. En las escuelas técnicas, se recomienda basar la enseñanza de la geometría en *consideraciones gráfico-intuitivas*, cultivando un rigor que no es propiamente científico, sino el *rigor propio de la intuición*.

Desde el principio, por tanto, el diseño sólo encontró su lugar en los “niveles inferiores” de la escolarización: en la educación infantil (hasta los diez años) y en la enseñanza técnica, que en Italia siempre se ha considerado “menos noble” que la educación basada en la cultura clásica.

En 1922-23, con la reforma diseñada por el filósofo Giovanni Gentile, el “Liceo Clásico” se convirtió en la cúspide del sistema escolar italiano. La reforma de Gentile sigue constituyendo, cien años después, el marco fundamental del sistema escolar italiano. Más que un modelo organizativo, constituye el “imprinting” fundamental de profesores, políticos, líderes de opinión. Este es el modelo que constituye el telón de fondo de todos los debates, aunque no siempre nos demos cuenta.

En este modelo, no hay dibujo en el Liceo clásico, ni siquiera en las horas en las cuales se habla de arte. El arte se contempla. El uso del dibujo en geometría se minimiza porque el razonamiento sólo necesita el dibujo como muleta. El valor educativo de la matemática reside en que es un “gimnasio para la mente”, no en su valor cognitivo. Por eso, en el bachillerato “clásico”, donde la matemática sólo debe tener un papel formativo, la geometría es casi exclusivamente la de Euclides.

Esta idea, desde un punto de vista estrictamente lógico, tiene raíces profundas y paradójicamente una coherencia propia con la evolución epistemológica de la matemática (basta releer algunas páginas de Jean Dieudonné para darse cuenta de esto).

En 1964, un matemático implicado en los problemas de la enseñanza, como Carlo Felice Manara, escribía que los dibujos sólo son una *ayuda para la debilidad humana y que su única función es ayudar al lector a seguir el razonamiento; en el razonamiento propiamente dicho no deben tener ningún papel*.

En realidad, las cosas no son tan sencillas. Más bien se piensa hoy en día que el razonamiento geométrico es tan importante porque no se reduce al mero ejercicio de la deducción: es un razonamiento rico, en el que intuición y deducción interactúan continuamente, y del que la construcción de figuras y el trabajo sobre ellas es parte integrante. Como escribe Fulvia Furinghetti: *el dibujo, entendido como construcción de la figura geométrica, ... es una especificidad de la geometría, importante como herramienta de aprendizaje que cataliza informaciones y competencias*. La actividad gráfica contribuye directamente a la construcción del conocimiento, no es sólo una aplicación de conocimientos ya adquiridos.

En las escuelas italianas, sin embargo, estas ideas, que vienen de lejos, que también podríamos llamar misconcepciones, siguen impregnando todos los aspectos. A pesar de que ya es un hecho compartido que la actividad representacional es una de las principales vías a través de las cuales se construye una conciencia incluso racional de la percepción de las propiedades de la realidad, a menudo se cultiva el dibujo sin profundizar en sus aspectos matemáticos; el alumno pierde así la posibilidad de vincular de manera racional su experiencia visual y su actividad representacional.

De hecho, ya se había alzado una importante voz a contracorriente a principios del siglo XX. Giovanni Vailati, destacado matemático y filósofo, figura central de la cultura italiana de principios del siglo XX, intentó tender un puente entre ambas disciplinas. Trabajó intensamente en la “Comisión Real para la Ordenación de los Estudios Secundarios”, creada por el ministro Bianchi en 1905. En 1909, la Comisión presentó un proyecto general de reforma escolar (que incluía la creación de un primer ciclo de secundaria unificado, algo que no se haría realidad en Italia sino hasta los años sesenta) y también especificó programas e indicaciones metodológicas. Vailati se inspira, en este trabajo para dirigirse al público más amplio posible, en las reflexiones del Congreso Internacional de Matemáticos en 1909, para decir que: «*En relación con la geometría, un primer punto fundamental, en el que me parece que los programas actuales de nuestros institutos de enseñanza secundaria deben mejorarse, es el de la conexión, que no se establece en absoluto, entre la enseñanza elemental de la geometría y los ejercicios de dibujo*».

La idea central contenida en el proyecto de Valiati es que el aprendizaje de la geometría no debe limitarse al conocimiento de nombres y fórmulas (algo que hoy en día se considera obvio), sino que pasa fundamentalmente por la exploración y la reflexión sobre las propiedades de las figuras, y esta exploración se realiza también a través del dibujo. Esta idea es especialmente importante hoy en día, si pensamos en las posibilidades de exploración que permiten los programas informáticos de geometría dinámica (y a cómo nos permiten pasar de la exploración a la demostración).

En el mismo congreso mundial de matemáticos, quizás también respondiendo a los estímulos de Vailati y de Federigo Enriques, matemáticos de diferentes países (entre ellos Henri Fehr, fundador de la revista *L’Enseignement Mathématique*) también hablaron sobre el mismo tema, mostrando cómo eran posibles experiencias diferentes del camino emprendido por la escuela italiana.

Las cosas, sin embargo, no cambiaron en Italia ni siquiera en las décadas siguientes, entre otras cosas porque el planteamiento posterior de Giovanni Gentile iba a ser inatacable. En 1949 Luigi Brusotti escribía que: «*En algunos programas la enseñanza del dibujo geométrico se confiaba al mismo profesor de matemática; en general, sin embargo, era responsabilidad del profesor de dibujo. Surge entonces la oportunidad de establecer conexiones y acuerdos entre los dos cursos, en beneficio común y para no crear antítesis entre nomenclaturas discordantes o entre construcciones diferentes, cuidando de que las construcciones aproximadas* *introducidas en el curso de dibujo sean siempre declaradas explícitamente como tales*».

Reducir el pensamiento geométrico al mero papel de ejemplo de pensamiento lógico ha llevado a perder de vista su riqueza de significados, que aumentaba enormemente su potencial formativo. En particular, ha llevado a pasar por alto el potencial formativo de la geometría del espacio y todo lo que implica, especialmente el pensamiento geométrico en el espacio. Todo esto se descuidó, hasta el punto de estar ausente, en la enseñanza en las escuelas italianas. Un gran matemático e intelectual como Bruno De Finetti escribió en los años sesenta que: «*el hecho de que pueda ser útil (y esto puede ser discutible) ilustrar a menudo los hechos geométricos sobre el caso del plano o sobre ejemplos en el plano y sobre figuras simples como los triángulos, no puede justificar la idea de limitarse durante meses o años a hablar sólo de geometría plana o incluso de triángulos, permitiendo que la idea de geometría se deteriore y se vuelva mezquina, limitándose a casos banales y provocando la pérdida de la intuición espacial*».

El paso de la riqueza de la experiencia, visual, táctil y psicomotora, a la representación mental y la conceptualización requiere una representación física como paso intermedio, y esto ocurre principalmente a través del dibujo, cuya práctica se va estructurando gradualmente hasta organizarse también en el dibujo geométrico.

¿Han cambiado las cosas en los últimos cincuenta años? Ciertamente, a nivel institucional, en los planes de estudios "previstos", las cosas son diferentes hoy en día. Los objetivos de aprendizaje definen claramente el papel de las representaciones y de las actividades de representación en todos los niveles escolares. Sin embargo, la transición de los planes de estudios «previstos» a los «aplicados» nunca es fácil, especialmente en una situación en la que los planes de estudios y las prácticas no han cambiado desde hace casi cien años. La impronta de la que hablábamos se ha grabado muy profundamente.

Lo que dificulta un cambio real, en el contexto italiano, es que este cambio en los programas escolares no ha sido seguido (o no ha precedido) de un cambio en los cursos de formación de los profesores. La enseñanza de la geometría descriptiva hace tiempo que desapareció de los planes de estudios universitarios, y muy poco queda (cuando queda) de la geometría proyectiva. En general, la "algebrización" de la geometría es un hecho consolidado. Por supuesto, esto es totalmente sensato a nivel universitario, pero significa que los estudiantes que en breve van a ser "transformados" en profesores de secundaria no han tenido normalmente ninguna oportunidad de desarrollar la intuición geométrica y aprender a *pensar geométricamente*, y mucho menos a *razonar en el espacio*. Así pues, resulta muy difícil para profesores y alumnos imaginar siquiera que *es posible otra geometría*, una geometría que no sea la de los triángulos o el cálculo de volúmenes de figuras sólidas.

Esperemos que este relato haya mostrado sucintamente, en un caso particular, la complejidad de las relaciones entre tendencias culturales, contextos ideológicos, reflexiones teóricas y de campo, opciones políticas y muchos otros elementos (podríamos utilizar la palabra *noosfera*), todos factores los cuales repercuten en última instancia en el trabajo diario de los profesores.

Notas

[1] Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna. Faculty of Education, Free University of Bozen - Bolzan.

Describir, clasificar y reconocer formas geométricas en preescolar

Agnese Del Zozzo[1]

Resumen

Toda observación y análisis de las estrategias ingenuas en matemática logradas por niños en edad preescolar ofrece elementos preciosos sobre la génesis de las ideas matemáticas y el desarrollo de las ideas matemáticas de cada niño en particular. Aquí se relatan algunos episodios significativos durante algunas experiencias de geometría llevadas a cabo con niños de jardín de infancia de 5 años de edad.

Palabras clave: geometría, preescolar, comunicación, aprendizaje ingenuo, terminología espontánea.

Descripción de la experiencia

En Angeli y colegas (2011/2023) en referencia al preescolar, Bruno D'Amore escribe esta frase: "si el niño se involucra, la matemática que surge espontáneamente es mucha" (p. 27). Es una frase contundente, que siempre ha despertado mi curiosidad y estimulado muchas preguntas: pero... ¿*cuánto*? Y... ¿*que*? Y... ¿tanto *cómo*?

En 2018, tuve la oportunidad de realizar un experimento en un preescolar italiano que el año precedente había acogido un curso de actualización impartido por el profesor D'Amore con una parte de taller – laboratorio coordinado por Giovanni Giuseppe Nicosia (Nicosia, 2017).

Esta experiencia resultó inestimable y en esta ocasión me gustaría compartir algunos de los episodios más esclarecedores.

La experimentación se desarrolló a lo largo de tres reuniones de aproximadamente una hora de duración cada una, programadas para finalizar en el plazo de una semana.

A las reuniones asistieron siempre los mismos 10 niños (a excepción de la última reunión, en donde faltó uno de ellos), todos ellos de 5 años de edad. Estos niños ya habían realizado algunas experiencias de geometría en los meses anteriores (por ejemplo, la construcción de una maqueta), pero nunca habían llevado a cabo un trabajo específico sobre la comunicación en matemática.

A lo largo de los tres días se abordaron diversos temas y se alternaron momentos de juego, entrevistas colectivas e intercambios comunicativos de los niños entre sí y con los adultos.

Se produjeron numerosos acontecimientos elocuentes que proporcionaron información sobre las estrategias ingenuas al hacer matemática puestas en práctica por los niños (Angeli et al., 2011).

Todos los encuentros fueron grabados en video y en audio, y el análisis de la documentación permitió dilucidar episodios significativos, algunos de los cuales serán presentados, discutidos, analizados e interpretados a continuación según diferentes lentes teóricas.

La visión de conjunto de la experimentación y las actividades propuestas en las tres reuniones, todas estas tomadas o inspiradas en Angeli y colegas (2011/2023) y Cottino y colegas (2011/2023) se esquematiza en la Figura 1.

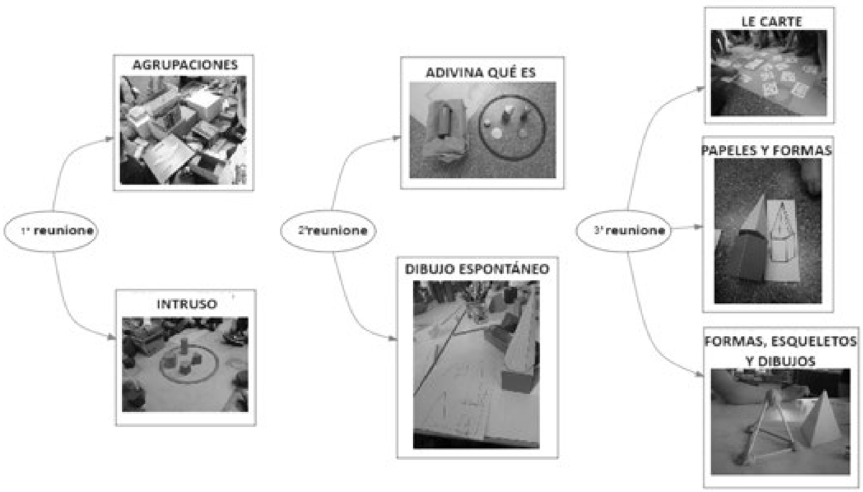


Fig. 1. Visión de conjunto de la experimentación y las actividades propuestas en las tres reuniones.

El primer encuentro: clasificación de formas tridimensionales

El tema se abordó con actividades de agrupamiento e identificación de propiedades geométricas. En la actividad *Agrupación*, los niños se relacionaron con objetos cotidianos que fueron analizados y clasificados primero por colores (Figura 2) y después por formas (Figura 3).

Al final de la clasificación por formas y tras un debate colectivo sobre los criterios utilizados para la agrupación, se presentaron a los niños nuevos objetos (numerosos modelos diferentes de sólidos de madera, plástico o cartón) para que los clasificaran en las distintas categorías que previamente habían sido identificado (Fig. 4).

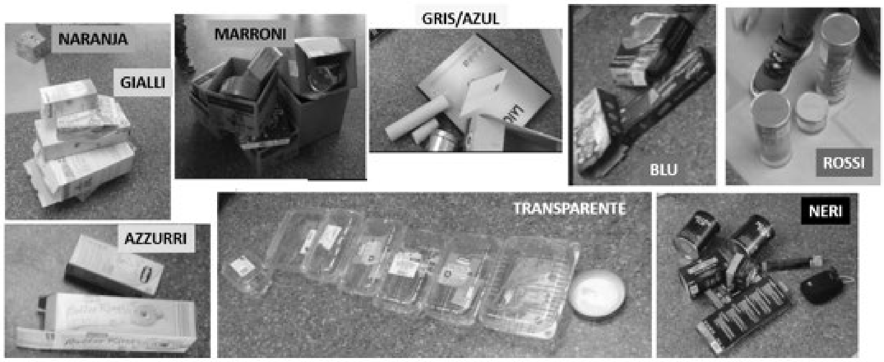


Fig. 2. Agrupación por colores.

Fig. 3. Primera agrupación por formas.

Fig. 4. Desglose de nuevos elementos por forma.

La primera reunión finalizó con el juego *El intruso* en el cual, utilizando sólidos de madera, plástico y papel, se propusieron configuraciones de 4 sólidos en las cuales identificar, mediante una discusión colectiva, el sólido extraño al grupo.

El segundo encuentro: descripción de formas tridimensionales

El tema se abordó con una propuesta inspirada en el juego *Adivina qué es* (Angeli et al., 2011, p. 123).

En el juego, un niño describe a sus compañeros una forma que no puede ver y que sólo puede tocar con las manos; los compañeros tienen que adivinar la forma descrita entre varias opciones posibles.

La actividad se desarrolló en diferentes fases, cada una de las cuales con variaciones en las reglas relativas al número de sólidos entre los que identificar el misterioso y a los modos de comunicación permitidos (la Tabla 1 ejemplifica las diferentes situaciones propuestas).

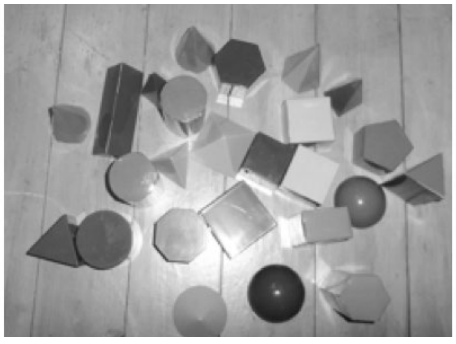
Situaciones de juego	Reglas
	El que tiene las manos en la caja: puede describir. Los que adivinan: puede hacer preguntas.
	El que tiene las manos en la caja: puede describir. Los que adivinan: NO HACEN preguntas.
	El que tiene las manos en la caja: sólo puede responder Sí o No. Los que adivinan: puede hacer preguntas.

Tabla 1. Las diferentes situaciones propuestas en el juego *Adivina qué es*.

El tercer encuentro: relación entre lo tridimensional y lo bidimensional

El tema se abordó con actividades que relacionaban los modelos de sólidos tridimensionales con los dibujos de sólidos sobre papel.

Las actividades alternaron momentos de clasificación de dibujos de sólidos con momentos de discusión colectiva sobre la diferencia entre las dos entidades geométricas.

El encuentro concluyó con una actividad de reconstrucción de un sólido, con palillos y plastilina, a partir de su modelo de plástico, papel o madera.

Un ejemplo: la terminología geométrica espontánea

El análisis de la documentación recogida reveló datos interesantes sobre la terminología espontánea utilizada por los niños para nombrar formas y grupos de formas.

Entre los términos utilizados, hay algunos que obtuvieron un amplio consenso en el grupo: fueron utilizados de forma general y constante por todos los niños, a lo largo de las tres reuniones y en todas las diferentes actividades.

Ejemplos de términos ampliamente aceptados, en el caso de las formas tridimensionales (Figura 2), son:

— las palabras *redondo(s)*, asociadas a todos los objetos de forma esférica, cilíndrica, semiesférica o troncocónica;
— las palabras *cuadrado(s)*, asociadas a todos los objetos de forma cúbica y a los paralelepípedos en los cuales una dimensión es significativamente menor que las otras dos;
— las palabras *largo/larga* o *rectangular(es)*, asociadas a todos los objetos con forma de paralelepípedo en los cuales una dimensión es significativamente mayor que las otras dos;
— las palabras triangular(es), triángulo(s) y puntiagudo (o con punta), asociadas a todos los objetos con forma de cono[2] y a todos los objetos cuya forma tiene al menos una cara triangular.

Para la denominación de otros tipos de formas (como prismas con caras trapezoidales o prismas con caras con un número de aristas mayor o igual a 5), ha habido propuestas (como *rampas* para los primeros, y *rombos* o *troncos* para los segundos, Figura 4), pero han sido designaciones aisladas, eficaces, pero no ampliamente aceptadas.

Los niños utilizaron palabras de amplio consenso con diferentes funciones/intentos comunicativos:

— *nombrar la forma de un objeto concreto*; por ejemplo, utilizando la expresión “éste es redondo”, pronunciada sujetando el objeto o señalando con el dedo hacia un sólido concreto;
— *nombrar la categoría de objetos de la misma forma*; por ejemplo, utilizando la expresión “los largos” pronunciada señalando con el dedo el grupo de objetos en forma de paralelepípedo en los que una dimensión es significativamente mayor que las otras dos;
— *investigar las propiedades específicas de la forma que hay que adivinar durante la actividad adivinar qué es*; casi sistemáticamente, las dos primeras preguntas que hacían los niños para adivinar el descriptor niño que tenía las manos en la caja eran: “¿es redondo?” y “¿tiene punta?”;
— *argumentar y explicar la elección de la forma extraña* en la actividad *El intruso*.

Relato, a modo de resumen, un esclarecedor episodio del juego *El intruso* donde una niña, G., revela todas sus dotes argumentativas. G., frente a un paralelepípedo de plástico azul, un prisma de plástico azul de base hexagonal, una semiesfera de plástico verde y una pirámide de madera, defiende la elección de la *punta* [es decir, la pirámide de madera] como intruso de la manera descrita en la Tabla 2.

El análisis del comportamiento lingüístico espontáneo que los niños demostraron durante la experiencia podría ser un trampolín para reflexionar, por ejemplo, en términos de ingeniería didáctica, sobre posibles variables significativas sobre las cuales actuar en el diseño de posteriores actividades de clasificación para favorecer la formación de modelos correctos en cuanto a la identificación de las propiedades que caracterizan a las formas.

Por ejemplo, se podría proponer a los niños que clasifiquen por formas un conjunto amplio de objetos, todos del mismo color y material, en el cual sólo estén presentes las formas que son *redondas* (forma esférica, cilíndrica, semiesférica y troncocónica).

Inmediatamente después, se puede proponer un nuevo conjunto de sólidos con la misma forma que los anteriores

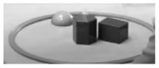
Palabras		Gestos y acciones
	Este es redondo porque no tiene punta.	Recoge la semiesfera.
	Este tiene una punta.	Señala la pirámide de madera.
	Ninguno de estos tiene una punta.	Hace un gesto giratorio alrededor del conjunto de todos los sólidos.
 	Todos se parecen. pero no tienen punta ni son redondos.	Recoge el prisma y el paralelepípedo.
		Deja el prisma y el paralelepípedo en el suelo y coge en la mano la pirámide y la semiesfera.
	Esto tiene la punta.	Se refiere a la pirámide.
	y éste es redondo.	Se refiere a la semiesfera.
	Aquí no ninguno que sea igual a este.	Se refiere a la pirámide.

Tabla 2.

(posiblemente añadiendo también formas cónicas) con diferentes tamaños, materiales y colores, pidiendo a los niños que los coloquen en el grupo "correcto" y entrevistándolos después para que expliquen el razonamiento.

Conclusiones

Las actividades propuestas y descritas en la sección anterior no son muy diferentes de las que ya se llevan a cabo de forma rutinaria en muchos jardines de infancia.

El hecho de que se llevaran a cabo con un grupo reducido de niños a lo largo de 3 encuentros cercanos y grabados en vídeo permitió realizar un análisis fino y profundo del material recogido, que resultó ser una mina de oro de información.

Empezamos con la frase: "Si el niño se involucra, la matemática que surgen espontáneamente es mucha" (Angeli et al., 2011, p. 27). Con base en la experiencia, si pudiera continuar la frase añadiría un "casi incontenible" y rica en ideas para orientar profundizaciones teorías en didáctica de la matemática y diseñar nuevas actividades y caminos útiles para favorecer la evolución de patrones espontáneos en competencias profundas.

Referencias bibliográficas

Angeli, A., D'Amore, B., Di Nunzio, M., & Fascinelli, E. (2011/2023). *La matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*. Bonomo editore [Primera edición: 2011, Pitagora].

Brousseau, G. (2008/2023). *Ingegneria didattica ed Epistemologia della Matematica*. Bonomo editore [Primera edición: 2008, Pitagora].

Cottino L., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., Ricci, M., Sbaragli, S., & Zola, L. (2011/2023). *Geometria*. Bonomo editore [Primera edición: 2011, Pitagora].

Nicosia, G. G. (2017). Esperienze di matematica nella scuola dell'infanzia nel corso di aggiornamento delle scuole ravennati, In: B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), Atti del XXXI Convegno Nazionale Incontri con la Matematica: *Matematica, didattica e scuola: fra ricerca e prassi quotidiana* (pp. 121-122). Pitagora.

Nota

Este artículo es la traducción revisada de:
Del Zozzo, A. (2018), Descrivere, classificare, riconoscere forme geometriche: resoconto di un'attività nella scuola dell'infanzia. En: B. D'Amore, & S. Sbaragli (Eds.) (2018), *La didattica della matematica, strumento concreto in aula*, Actas del homónimo Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica" n. 32, Castel San Pietro Terme, 16-17-18 Noviembre 2018. Pitagora.

1 Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática, Departamento di Matemática, Universidad de Bolonia. Universidad de Trento.

2 El cono parece ser una forma controvertida. De hecho, durante la clasificación de formas tridimensionales en la primera reunión, se colocó entre los *triángulos*, mientras que en la tercera reunión, durante la clasificación de dibujos de sólidos, el diseño del cono, junto con el de la esfera, el cono truncado y el cilindro, se colocó en el grupo de los *redondos*.

Enseñanza y aprendizaje de la matemática en contextos multiculturales

Posibles enfoques de formación de profesores

Benedetto Di Paola[1], Giuseppe Bianco[2], Giovanni Giuseppe Nicosia[3]

Resumen

La multiculturalidad se percibe en muchos entornos educativos como un "problema" en lugar de un "recurso". Muchos profesores, enfrentándose diariamente a la diversidad cultural en sus aulas, experimentan dificultades e incomodidades diversas, lo que a menudo conduce a una solicitud posterior de formación. Sin embargo, en muchos casos, esta formación no satisface adecuadamente sus necesidades reales. Esta contribución busca profundizar en las investigaciones relacionadas con la enseñanza/aprendizaje de la matemática en entornos multiculturales. Describe algunos aspectos de un estudio llevado a cabo en Italia en los últimos dos años, especialmente a través de cursos de formación de profesores enfocados en estos temas, implementados a distancia mediante una metodología híbrida de Lesson y Learning Study.

Palabras clave: enseñanza/aprendizaje de la matemática, contextos multiculturales, formación de profesores.

Introducción

La multiculturalidad, entendida como la co-presencia física (y no sólo) de varias "realidades" culturales, sociales, políticas, etc., en relación unas con otras, intercambiándose y creciendo juntas, es un rasgo cada vez más relevante de nuestra sociedad. Al observar los fenómenos actuales que experimenta la escuela en muchas partes del mundo, es imprescindible destacar cómo se ha vuelto absolutamente multiétnica en tantos contextos, y cómo puede y debe fomentar, desde los primeros años, oportunidades de "apertura" hacia un nuevo modelo de convivencia, de auténtico diálogo entre las diferentes experiencias vitales de profesores y alumnos (Nicosia, 2008; Bianco & Di Paola, 2023).

El objetivo que la escuela debe perseguir con fuerza es, de hecho, hacer comprender cómo la multiculturalidad puede traducirse en actividades interculturales referidas a las experiencias concretas de los individuos, insertadas en los diversos contextos escolares, para hacerlas transculturales; estas experiencias personales deben ir adquiriendo valor y ser compartidas hasta convertirse en patrimonio de todos, de una nueva comunidad transcultural (Di Paola, 2016). La idea de multiculturalismo, y por tanto de interculturalidad, debería estar ligada a una interpretación de la *diversidad* como un recurso para la comunidad, como una oportunidad para identificar nuevas perspectivas de desarrollo y enriquecimiento humano y profesional para el mundo escolar (Nicosia, 2018) ... Sin embargo, no siempre es así. Los datos de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) sobre la enseñanza y el aprendizaje TALIS (*Teaching And Learning International Survey*, 2018) relativos a una comparación internacional de las prácticas docentes de los profesores de secundaria y su formación sobre cuestiones interculturales (equidad, "diversidad", inclusión cultural, enfoques no etnocéntricos, etc.) subrayan cómo estas complejas cuestiones se viven a menudo en la educación como un "problema" y no como un "recurso". Aproximadamente una quinta parte de los docentes que experimentan a diario la realidad multicultural en sus aulas, al no considerarse "bien preparados" en lo que respecta a la "enseñanza en contextos multilingües y multiculturales", manifiestan un consecuente malestar profesional, en muchos casos frustrante también para los alumnos que viven en dichos contextos y que en muchas ocasiones "pierden" la oportunidad de crecer *junto* a compañeros "no italianos" (Ainley & Carstens, 2018).

La consiguiente demanda de formación es evidente, así como la constatación de que, en muchos casos, esta se desatiende a varios niveles o se propone de forma no perfectamente adecuada a las necesidades reales de los profesores solicitantes (Bianco & Di Paola, 2023).

Multiculturalismo entre la investigación y la práctica docente en matemáticas

Las reflexiones anteriores han abierto, en el ámbito de la investigación educativa, la necesidad de interpretar la educación intercultural dentro de realidades territoriales concretas, testimoniando y concretando así el concepto de identidad cultural y emergencia educativa (Nicosia, 2008; Bianco & Di Paola, 2023). La conciencia de la necesidad de tener en cuenta la contextualización cultural e histórica en las prácticas de enseñanza de las matemáticas en el aula, y la asunción crucial de que la cultura impregna las prácticas de educación matemática (Roth & Radford, 2011), son hoy en día bien conocidas por los investigadores implicados en la enseñanza/aprendizaje de la matemática. A pesar de la importancia de los temas tratados y del esfuerzo de la investigación, y en concreto, de la investigación en educación matemática, por tratar de dar respuesta a las necesidades antes mencionadas mediante la definición de marcos teóricos y metodológicos capaces de captar los fenómenos recurrentes y significativos que ocurren en dichos contextos escolares, aún no son muchas las reflexiones didácticas, pedagógicas y disciplinarias dirigidas específicamente a profesores y formadores que trabajan en contextos complejos como los aquí examinados.

Un trabajo pionero en este sentido es el de Bishop (1988), quien destacó la importancia de reconocer las prácticas matemáticas como fenómenos sociales integrados en las culturas y sociedades que las generaron. D'Ambrosio (2006) continuó resaltando cómo prestar atención a los aspectos culturales y sociales de la práctica matemática contribuye a comprender tanto las culturas como la propia matemática. La investigación de Bill Barton (por ejemplo, Barton, 2007) también ha reforzado la importancia de una perspectiva cultural en el estudio de los elementos y hechos relacionados con la educación matemática, centrándose además en los diferentes aspectos multilingües del aprendizaje matemático. Lo que sigue siendo poco debatido en el campo de la investigación es más bien la conciencia de los efectos y posibles beneficios que las iniciativas centradas en la diversidad cultural pueden promover en la formación del profesorado.

> La idea de multiculturalismo, y por tanto de interculturalidad, debería estar ligada a una interpretación de la ***diversidad*** como un recurso para la comunidad, como una oportunidad para identificar nuevas perspectivas de desarrollo y enriquecimiento humano y profesional para el mundo escolar[..]

En los últimos años, algunos trabajos de investigación han abordado este interesante aspecto (por ejemplo, Bartolini Bussi et al., 2018; Bianco & Di Paola, 2022, 2023; Di Paola, 2016, 2023; Mellone et al., 2019; Spagnolo & Di Paola, 2010) y han definido el constructo de *Transposición Cultural* como una perspectiva capaz de resaltar el valor de y permitir "el encuentro", "el entrelazamiento", entre diferentes prácticas/enfoques de la educación matemática en las escuelas actuales, integrando claves de "otros" contextos culturales (a menudo no eurocéntricos). Esta perspectiva define un espacio potencial para la reflexión y el desarrollo de la conciencia tanto para investigadores, educadores y profesores (Mellone *et al*., 2019). Según este marco teórico, observar (y posteriormente "promulgar") prácticas de enseñanza de la matemática de otras culturas en la propia realidad del aula, dentro del propio contexto cultural, implica para un profesor (y para un investigador, aunque de manera diferente) una fuerte implicación en un proceso de "deconstrucción" útil para una reinterpretación del propio pensamiento y, en consecuencia, para un posible/adecuado cambio/superación de las propias creencias personales (culturales), así como de los propios valores y principios didácticos (Derrida, 2002) en Matemáticas, pero no solo.

Una Smart Community de profesores en formación

Para atender a las necesidades de formación del profesorado en estos temas y abordar la fragmentación evidente de las áreas territoriales nacionales individuales, hemos implementado en los últimos años un curso de formación profesional a distancia para profesores, a través de una plataforma digital alojada en https://www.u4learn.it/. El objetivo principal de este curso de formación ha sido facilitar el proceso de "contaminación" (Mellone et al., 2019; Manolino et al., 2020) y enriquecer las propias prácticas didácticas proporcionando pistas teórico-metodológicas e ideas útiles para replantear y mejorar la enseñanza en el aula, con especial atención a algunas de las presencias lingüístico-culturales más representativas en Italia, como el árabe, el indio y el chino (AA.VVV, 2021; Spagnolo & Di Paola, 2010; Bianco & Di Paola, 2022). Los siguientes párrafos ilustran, sin pretender ser exhaustivos, la piedra angular epistemológica y cómo esta fue explicitada y aprovechada por los docentes que participaron en el curso de formación, mediante la metodología Lesson Study (L.S.) y Learning Study (l.s.) (Huang et al., 2019; Lo & Marton, 2012). La referencia al contexto chino que se menciona aquí pretende ser un ejemplo de lo que propusimos desde una perspectiva pedagógica/disciplinaria a la comunidad de docentes que formamos (Bianco & Di Paola, 2022, 2023; Di Paola, 2023).

Lesson e Learning Study para la formación continua a distancia

Esta sinergia entre formación y estudio pedagógico/disciplinario en profundidad se ha propuesto utilizando los enfoques Learning Study (l.s.) y Lesson Study (L.S.) como marcos teóricos, donde la reciprocidad entre la formación docente, la teoría pedagógica y una fuerte implicación práctica en el contexto del aula es central (Huang et al., 2019).

Según Lo & Marton (2012), el l.s. ofrece una posible "plataforma" dinámica donde la enseñanza puede ser considerada como una ciencia experimental y una forma de investigación-acción. "ElL.s. ofrece una base potencial para tal empeño [de investigación-acción, síntesis de experimentación y perspectivas pedagógicas] ya que concierne a los profesores que investigan colectiva/colaborativamente sus propias prácticas para generar y compartir conocimiento sobre cómo enseñar...las teorías pedagógicas que subyacen a tal construcción de 'conocimiento' son a menudo implícitas y poco claras" (Lo & Marton, 2012, pp.8). "El l.s. se basa siempre en una teoría del aprendizaje: toma un objeto de aprendizaje (y de enseñanza) como punto de partida, y se centra en ayudar a los profesores a ayudar a los alumnos a aprender ese objeto de aprendizaje [de acuerdo con la perspectiva adoptada según la teoría del aprendizaje concreta]" (ibíd.). Learning Study (l.s.), en este sentido, representa una subcategoría de Lesson Study (L.S.), siendo más específica pero también una herramienta más amplia y completa. En L.S. se integran y se desarrollan de forma complementaria determinadas perspectivas, como la reflexión teórica y el consiguiente diseño de materiales, la interpretación del feedback, etc. Estas perspectivas son útiles para constituir una visión "unitaria/común" de la asignatura entre los distintos elementos del grupo y para hacer más acotado/guiado y coherente el proceso de L.S., debido a la necesidad de explicitar los supuestos pedagógicos. Sobre el potencial de la L.S. para la formación del profesorado se pueden encontrar reflexiones interesantes en Bartolini Bussi & Ramploud (2018). En el contexto italiano y europeo, sin embargo, se encuentra poco sobre el uso de la l.s. para la formación del profesorado.

La síntesis entre L.S. y l.s. aquí mencionada responde a varias tensiones complementarias y necesarias para la formación de profesores en general y, en concreto, para lo que hemos propuesto a los docentes italianos:

— Que sea interactiva, abierta a todos y funcional a la definición de una Comunidad Smart nacional, sobre temas específicos de la asignatura o más amplios (por ejemplo, la interculturalidad).
— Que se centre en temas que a menudo son poco conocidos por los profesores y que requieren una formación específica, como el componente (multi) cultural en matemáticas.
— Que esté suficientemente estructurada para poder utilizarse también a distancia (L.S. vs/& l.s.).

Estas orientaciones pueden resumirse en dos preguntas que constituyen el trasfondo de nuestra investigación: *¿Pueden los cursos de Lesson Study (L.S.) y Learning Study (l.s.) favorecer un posible "equilibrio" entre las necesidades de formación permanente de los profesores y las "nuevas" cuestiones pedagógicas relativas al tema de la interculturalidad? En un contexto de aprendizaje a distancia, ¿cómo podemos estructurar un "lugar" de intercambio en línea para crear una Smart Community nacional de profesores competentes en los temas en cuestión?*

De la experiencia "piloto" en el contexto chino a la definición de buenas prácticas de formación

Con el objetivo de responder a las preguntas de investigación descritas anteriormente y en consonancia con los supuestos teóricos de la Learning Study (l.s.) y Lesson Study (L.S.), en los últimos dos años hemos implementado experiencias piloto de cursos a distancia sobre temas considerados urgentes para la escuela actual, como la inclusión y la práctica docente en contextos multiculturales y multilingües, tal como se mencionó anteriormente.

Estos experimentos se llevaron a cabo en modalidad en línea, con la participación de profesores ubicados en zonas geográficas de la península italiana con un alto índice de alumnos con antecedentes culturales no italianos (Capone et al., 2022). Cada una de las acciones formativas en cada una de las realidades territoriales implicadas fue diseñada para cultivar la sensibilidad intercultural en los profesores, y por ende en sus alumnos, partiendo de características locales específicas. Por consiguiente, en función del contexto sociocultural progresivamente investigado, las metodologías y los contenidos propuestos durante el curso se adaptaron en relación con las necesidades y los orígenes de los alumnos en las clases de la zona. Para cada una de las acciones formativas, también consideramos necesario definir propuestas de formación sobre temas históricos, lingüísticos y culturales, además de los estrictamente disciplinares. Todo ello con el fin de proporcionar un análisis más preciso del estado y la dinámica en funcionamiento en las distintas clases implicadas y ofrecer a los profesores algunas lentes comparativas y de observación para interpretar el pasado, las dificultades y las expectativas de sus alumnos, recién llegados a Italia.

A modo de ejemplo, presentamos en la Tabla 1 una sinopsis de los temas tratados durante las ediciones del curso piloto (unas 25 horas) centradas en China. De acuerdo con lo expuesto anteriormente sobre la necesidad de ampliar la mirada más allá de las matemáticas y más allá de la propia cultura, fueron significativas las numerosas aportaciones "divergentes" a las que estuvieron expuestos los profesores de matemáticas. Las fases de trabajo colectivo (14 horas) se estructuraron según un enfoque L.S. y l.s. Los autores de este trabajo participaron en la definición y estructuración de los materiales y en la aplicación a distancia con profesores de diferentes órdenes e institutos escolares.

Encuentro 1 Introducción a los temas del itinerario de formación	**Encuentro 2 Marcos teóricos y metodológicos**	**Encuentro 3 Sistemas educativos**	**Encuentro 4 & 5 Matemáticas y China**		**Reuniones posteriores (Se modularán adecuadamente)**
Razones del itinerario de formación: - La situación multicultural y multilingüe de las aulas ita-lianas; - Los datos de OCDE-PISA.	Marcos teóricos de la investigación en Historia y Di-dáctica de las Matemáticas: - Lesson y Learning Study; - Transposición cultural; - Referencias Etnomatemáticas.	Comparación de sistemas educativos en diferentes contextos culturales. Aspectos histórico-epistemológicos subyacentes.	Profundización en la caracterización del área científica desde una perspectiva no eurocéntrica.	Enseñanza/ aprendizaje de las matemáticas en las escuelas chinas de Educación primaria, Educación secundaria obligatoria y superior: ejemplos de prácticas en el aula.	Planificación comprartida de materiales y prácticas de aula inclusivas (L.s y l.s) en contextos multiculturales a partir de algunos núcleos temáticos elegidos por profesores individuales para los distintos niveles escolares de interés.

Tabla 1. Esquema temático del curso de formación piloto

A partir de los estímulos y la retroalimentación recopilados y analizados hasta ahora, gracias a la participación de los docentes en las diversas experiencias que hemos ofrecido como momentos formativos individuales en todo el país como parte de nuestra experimentación piloto, ha surgido un tema común y transversal (que se refleja en las dos primeras columnas de la Tabla 2) relacionado con las cuestiones multiculturales y multilingües que hemos explorado. En este sentido, nuestra propuesta piloto ha permitido una reflexión metacognitiva de nuestra parte, la cual se ha materializado en la estructuración de una arquitectura teórico-metodológica y en el apoyo continuo a los profesores, con el objetivo de que puedan aplicar lo aprendido en su práctica docente diaria en aulas multiculturales (y no solo con alumnos chinos). En respuesta a las preguntas de investigación planteadas, hemos perfeccionado las metodologías L.S. y l.s. durante el último año con el fin de lograr un equilibrio o compromiso entre las necesidades de formación de los profesores y los desafíos específicos de enseñanza relacionados con la interculturalidad. Esto ha dado lugar al diseño de un espacio en línea para el uso y la creación de materiales redactados de manera apropiada desde una perspectiva intercultural, los cuales se mantienen constantemente actualizados.

Consideramos que nuestra estrategia puede ser interpretada como un proceso de aproximación a las buenas prácticas en la formación del profesorado sobre estos temas, el cual también puede ser aplicado en otros contextos y que ha sido poco explorado en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Basándonos en lo discutido en la literatura (Huang et al., 2019; Pang & Marton, 2003; Pang & Lo, 2012; Cheng & Lo, 2013), el enfoque híbrido de L.S. y l.s. que hemos desarrollado para alcanzar nuestros objetivos es el siguiente:

1. Elección de un tema (ejercicio/problema) por los profesores mediante cuestionarios a distancia.
2. Planificación colectiva ("*lesson plan*") de una práctica docente ("*intended object of learning*" de la "*Reseach Lesson*") a partir de las experiencias de cada profesor.
3. Propuesta de una intervención didáctica en el aula por parte de un profesor, según sus propias elecciones y de acuerdo con lo acordado con el grupo. Los investigadores y colegas observan la práctica en el aula, tomando nota de las críticas y fortalezas pedagógicas.
4. Se evalúan los resultados de la práctica docente considerando las perspectivas "*enacted object of learning*" y "*lived object of learning*" (Marton & Tsui, 2004), con especial énfasis en los aprendizajes de los alumnos a través de entrevistas y protocolos compartidos en el grupo.
5. Revisión del "*lesson plan*" y la práctica docente en reuniones periódicas del grupo de profesores
6. Intercambio con profesores externos de la comunidad sobre las prácticas pedagógicas definidas.

Las etapas de formación 2-5 anteriores constituyen una estructura que se repetirá cíclicamente en función de las nuevas necesidades que surjan de cada profesor en formación. Estos pasos, tal y como los hemos diseñado, permiten, también gracias a la dimensión online, una estratificación dialógica de los conocimientos y propuestas que se van elaborando por el grupo

Conclusiones

Durante varios años, la escuela ha destacado la necesidad que tienen los profesores, los alumnos y sus familias de un tipo de apoyo que la institución educativa por sí sola no puede proporcionar en lo que respecta a la acogida y la implementación de proyectos educativos donde la presencia de diversas culturas se considera una contribución fundamental para el desarrollo de todo el grupo clase. La investigación educativa, particularmente en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, ha intentado abordar estas necesidades mediante la creación de marcos teóricos y metodológicos capaces de capturar los fenómenos recurrentes y significativos que ocurren en entornos escolares

> El objetivo que la escuela debe perseguir con fuerza es, de hecho, hacer comprender cómo la multiculturalidad puede traducirse en actividades interculturales referidas a las experiencias concretas de los individuos, insertadas en los diversos contextos escolares, para hacerlas transculturales; estas experiencias personales deben ir adquiriendo valor y ser compartidas hasta convertirse en patrimonio de todos, de una nueva comunidad transcultural. (Di Paola, 2016)

multiculturales y plurilingües. El objetivo es brindar apoyo a todas las partes involucradas en el proceso de inclusión escolar. Actualmente, existe una creciente necesidad en la investigación de este campo de reflexionar y desarrollar perspectivas teórico-metodológicas específicas para la formación del profesorado en temas interculturales (AA. VV., 2021; Bartolini Bussi & Ramploud, 2018; Bianco & Di Paola, 2022; Spagnolo & Di Paola, 2010). En este trabajo, nos hemos centrado en las contribuciones de Mellone et al. (2019), quienes introdujeron el concepto de transposición cultural, y cómo este puede ser hecho explícito y utilizable por los profesores a través de metodologías de formación como Lesson Study (L.S.) y Learning Study (l.s.) (Huang et al., 2019; Lo & Marton, 2012). Hemos descrito la investigación realizada en los últimos dos años sobre cursos de formación continua a distancia relacionados con temas de inclusión y práctica docente en contextos multiculturales y multilingües, con un enfoque en el área de las matemáticas, pero no limitado a ella.

En relación con la literatura existente y en respuesta a nuestras preguntas de investigación, los resultados obtenidos durante los experimentos nos llevan a creer que nuestra investigación está progresando hacia el diseño de un espacio digital en línea, destinado a facilitar un posible equilibrio entre las necesidades de formación de los profesores y los desafíos específicos relacionados con la enseñanza intercultural. Este espacio puede promover el uso y la creación de materiales escritos apropiados desde una perspectiva intercultural, abordando así una laguna a menudo destacada en el ámbito escolar, no solo en contextos europeos o italianos. Evidentemente, el proceso de definición de la formación del profesorado como "buena práctica" está aún en curso y esperamos que con el tiempo nos lleve a establecer una formación estructurada y cada vez más consistente. Esta formación debería favorecer el apoyo continuo al profesorado y la preparación/compartición de materiales accesibles y compartidos de manera más amplia dentro, y fuera, de la comunidad de profesores e investigadores mencionada anteriormente. Esperamos que nuestro trabajo de investigación pueda servir como punto de partida para la creación de otros "espacios" de encuentro y de "lugares" de intercambio para los profesores, que estén conectados entre sí. Creemos y esperamos que esto pueda contribuir a abordar las necesidades de la Escuela y, en particular, de los profesores de Matemáticas.

Referencias bibliográficas

Ainlry, J., & Carstens, R. (2018). *Teaching and Learning International Survey (TALIS) 2018 Conceptual Framework*. OECD Publishing.

M. G. Bartolini Bussi, & A. Ramploud (Eds.) (2018). *Il Lesson Study per la formazione degli insegnanti*. Carocci.

Barton, B. (2007). *The language of mathematics: Telling mathematical tales*. Springer Science & Business Media.

Bianco, G. & Di Paola, B. (2022). Calculus artefacts in Chinese textbooks: variational approaches with prospective primary teachers, *JME: Journal of Mathematics Education*, 15, 2.

Bianco, G., & Di Paola, B. (2023). Insegnare e apprendere matematica in contesti multiculturali. Il Lesson Study per/come Smart Community di insegnanti in formazione. *La Formazione dei Docenti di Matematica tra continuità e innovazione: il Lesson Study*, 143.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on Mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

D'Ambrosio, U. (2006). *EthnoMathematics - Link between Traditions and Modernity*. Sense Publisher.

Derrida, J. (2002). *Negotiations*. Stanford Univ. Press.

Di Paola, B. (2016). Why Asian children outperform students from other countries? Linguistic and parental influences comparing Chinese and Italian children in Preschool Education. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *11*(9), 3351–3359.

Di Paola, B. (2023). *Chinese variation approach in 3D geometry problem solving: an experience of cultural transposition in grade 8*, *JME: Journal of Mathematics Education*, Special Issue on Classroom Practice at Primary Level.

Lo, M. L., & Marton, F. (2012) Towards a science of the art of teaching Using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *1*(1), 2012, pp. 7-22.

Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B., & Martignone, F. (2019). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. *ZDM*, *51*(1), 199-212.

Nicosia, G.G. (2008) *Numeri e culture. Alla scoperta delle culture matematiche nell'epoca della globalizzazione*. Erickson.

Nicosia, G.G. (2018). Algoritmi spontanei in classi multiculturali. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 4, 100-115.

Roth, W. M., & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning* (Vol. 2). Springer science & business media.

Spagnolo, F., & Di Paola, B. (2010). *European and Chinese cognitive styles and their impact on teaching Mathematics*. Springer, Studies in Computational Intelligence, 277.

Notas

1 Universidad de Palermo, Italia.
2 Universidad de Palermo, Italia.
3 NRD de Bologna, Italia.

Las tres modalidades matemáticas de ver un dibujo en geometría y los cuadros en arte figurativa

Raymond Duval[1]

Resumen

Para ver matemáticamente una figura o un dibujo construido con un instrumento, es necesario reconocer rápidamente todas las posibles unidades figurativas de dimensión *n*D/2D que se yuxtaponen o superponen. Para mirar un cuadro, también hay que reconocer en el las unidades figurativas que lo componen. Pero en pintura lo fundamental es el uso del color. El color crea efectos paradójicos de ilusión o de visualización de objetos imposibles.

Palabras clave: deconstrucción, unidades figurales *n*D/2D, mirada, color, heurística.

Tanto en geometría elemental como en arte figurativo, debemos abandonar la noción de “espacio” porque es una noción equívoca. Esto al menos para captar los procesos cognitivos de exploración y composición en estos dos dominios en los cuales la vista es esencial y donde hay que “ver” *con los propios ojos o, dicho de otra forma, sobre todo con los propios ojos*. Y es esta necesidad cognitiva de “ver” la que orienta el uso heurístico de las “figuras geométricas” en la resolución de los problemas. La noción equívoca de espacio debe ser sustituida por la de *unidad figurativa de dimensión nD/mD*, en la cual el numerador indica el número de dimensiones de lo que se ve (3D, 2D, 1D o 0D) y el denominador el número de dimensiones *en el que se ve* lo que es dado a ver, por lo tanto, sólo 2D o 3D.

Las figuras geométricas se distinguen de todas las demás representaciones visuales por el hecho de *que siempre hay varias formas de reconocer en estas unas formas o unidades figurales, aunque el hecho de reconocer las unas excluye la posibilidad de reconocer las otras*. En otras palabras, para ver matemáticamente una figura o un dibujo se debe poder CAMBIAR DE MIRADA sin que se modifique la representación visual en el papel o en la pantalla.

Y es esta necesidad cognitiva de “ver” la que orienta el uso heurístico de las “figuras geométricas” en la resolución de los problemas.

Para analizar el funcionamiento cognitivo de este cambio de perspectiva *debemos tener en cuenta la dimensión de las unidades figurales*. Las unidades figurales que reconocemos pueden ser cubos, pirámides, esferas (3D) o polígonos, círculos (2D) o rectas, curvas (1D) o incluso puntos (0D). Respecto a los puntos, sólo son visibles los puntos destacables (vértices, intersecciones, extremos). Los otros puntos deben marcarse con una codificación. En este sentido, una unidad figural 1D es un continuo visual que representa equívocamente el continuo matemático de la recta real.

Sin embargo, esto no es suficiente; también hay que distinguir las representaciones físicas de estas unidades figurales como modelos de cubos (3D/3D) o plantillas (2D/3D) o alambres estirados o un rayo láser (1D/3D) y las representaciones semióticas en perspectiva (3D/2D), o el contorno cerrado de superficies (2D/2D) o los contornos de curvas y líneas rectas (1D/2D).

Cualquier transición de una dimensión a otra, para el numerador, representa un salto cognitivo considerable, al igual que el paso de una representación física a una representación numérica (cambio del denominador). Generalmente *es siempre la unidad figural de la dimensión superior la que inmediatamente se impone a la percepción* y la que bloquea el reconocimiento de todas las unidades figurales de dimensión inferior que potencialmente involucra y fusiona visualmente. Ver *una figura «geométricamente» es*:

deconstruir dimensionalmente unas formas 3D/2D que vemos en hueco o en relieve, en una configuración de formas 2D/2D,

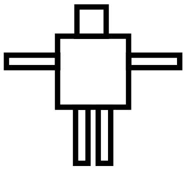
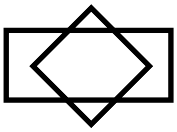
deconstruir formas planas 2D/2D que reconocemos perceptivamente por su contorno cerrado, cóncavo o convexo, en configuraciones *1D/2D de líneas rectas o curvas.*

Y esto sin que nada cambie en el dibujo mostrado en pantalla o construido instrumentalmente sobre papel. Y el uso heurístico de una figura consiste en el proceso inverso:

reconocer unidades figurales 2D/2D en conjuntos de unidades figurales 1D/2D,

reconocer unidades figurativas 3D/2D en conjuntos de unidades figurales 2D/2D.

La siguiente tabla nos permite comprender el poder semio-cognitivo ilimitado de este proceso de descomposición dimensional de formas y de objetos que reconocemos en el espacio real 3D/3D.

Figuras 2D/2D (Configuración global)	Dos descomposiciones VISIVAMENTE INCOMPATIBLES en unidades figurales 2D/2D (= formas o contornos serrados reconocidos)		Y una tercera en unidades figuraleS 1D/2D
	Ensamblaje/descomposición por JUSTAPOSICION	Ensamblaje por SUPERPOSICION	construcción instruméntale
	6 formas, cada una siendo una parte del cuerpo humano. (icónica)	5 formas, siendo cada una forma rectangular más o menos larga	18 segmentos o 12 rectas subyacentes
	5 formas poligonales (dos triángulos, dos pentágonos, un hexágono). (no icónico)	2 polígonos regulares (un cuadrado y un rectángulo). 8 BORDES de unidades 2D/2D (o lados)	

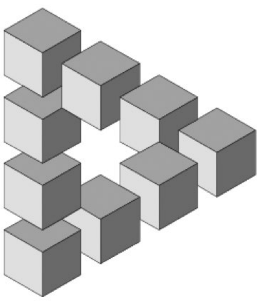
Podemos notar fácilmente que los reconocimientos de unidades figurales 2D, por yuxtaposición en la primera figura y por sobreposición en la segunda figura, se imponen inmediatamente a la mirada y que *esto nos impide ver los otros posibles reconocimientos de unidades figurales 2D y aún más las unidades figurales 1D*.

Para formular propiedades, por ejemplo en las definiciones, la modalidad matemática de ver privilegia las unidades figurativas 1D/2D. Y esta requiere que podamos reconocer los puntos como unidades figurales (0D/2D). Pero aquí llegamos a los límites de la visualización geométrica. Dado que, los únicos puntos intrínsecos a una figura son los puntos de intersección de dos unidades 1D, es decir los vértices o los cruces de rectas. Todos los demás puntos se refieren a una operación de marcado que es análoga a la de una codificación de letras.

Nadie, obviamente, confundirá el proceso de deconstrucción dimensional de formas inmediatamente percibidas y reconocidas con el proceso heurístico de expansión dimensional que consiste en ver unidades figurativas nD/2D en unidades figurativas (n+1)D/2D.

El paso de una forma de ver a otra debe ser espontáneo, de lo contrario no podremos entender nada.

La educación de la mirada en geometría y en pintura se centra en el discernimiento de las múltiples unidades figurales de diferentes dimensiones que las configuraciones geométricas y las pinturas yuxtaponen, superponen o fusionan. Pero las configuraciones geométricas y las pinturas, al igual que las pinturas rupestres, entran en conflicto en el uso del color. Mientras que el color es fundamental en la pintura, el color no tiene significado en las configuraciones geométricas. Su uso en configuraciones geométricas *crea ilusiones, visualiza objetos físicamente imposibles o llega incluso a borrar el dibujo de todas las unidades figurales 2D/2D* cuya superficie ocupa. A continuación se muestran dos ejemplos (D'Amore & Duval, 2023; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2017).



Unidades figurales 3D/2D	Unidades figurales 2D/2D completas	Unidades figurales 2D/2D parciales por sobreposición	Unidades figurales 1D/2D (bordes de unidades figurales 3D/2D)
9 unidades (cubos)	15 unidades completas (cuadriláteros)	9 unidades parciales por sobreposición	43 unidades (bordes)

Oscar Reutersvärd, *Figura imposible*. 1934. Tinta sobre papel.
Un arreglo de 9 cubos independientes para CONFIGURAR un triángulo.

La configuración (3D/2D) representa un objeto físicamente imposible (3D/3D). Entonces podemos preguntarnos: ¿qué unidades figurales 2D/2D y 1D/2D deberían cambiarse para que la configuración pueda representar una posible configuración de objetos físicos?

Simplemente eliminar los dos colores que diferencian las caras de cada cubo.

Además, los colores no intervienen en la manera de ver una configuración geométrica (la misma expresión "figura" es equívoca). Y todas las unidades figurales 3D/2D construidas instrumentalmente pueden verse huecas o llenas. Se trata de entrenar la mirada (Duval 2018, p. 233, Figura 8).

Los dos colores separan todas las unidades figurales 2D/2D rojas del fondo compuesto por las unidades figurales 2D/2D verdes y borran todas las unidades figurales 1D/2D (Duval, 2018, p. 216, Figura 1).

Y sólo hay 24 triángulos rojos y 24 triángulos verdes en total. Para comprobar esto, simplemente hay que presentar la figura durante 30 segundos o un minuto a los estudiantes o profesores, y preguntales a continuación:

— *¿Qué color te llamó la atención*?
— *¿Cuál es la forma dominante*? (Círculo, cuadrado, triángulo, diamante o cometa, otra)?

Pero la inscripción de esta tabla controla la forma de verla, un poco como un enunciado de un problema controla la forma de ver la configuración geométrica asociada a esta. Se deben introducir dos modalidades: una en donde la tabla se presenta sin la inscripción, y otra en la cual se presenta con su inscripción. Sin embargo, lo que nuestros ojos ven y lo que queda son los colores y las unidades figurales.

Referencias bibliográficas

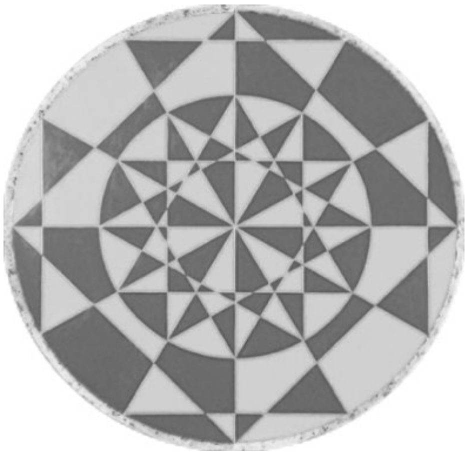
D'Amore, B., & Duval, R. (2023). Similitudes y diferencias entre la educación de la mirada en geometría elemental y en arte figurativo. ¿Qué variables cognitivas y didácticas intervienen? ¿Cómo se representa la imposibilidad en el arte? ¿Qué elementos semióticos pueden intervenir en el arte? *Educación Matemática, 35*(1), 35-58.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Imparare la matematica (a volte) è difficile: come possiamo aiutare i nostri allievi? *La Vita Scolastica web*. *71*(1). http://www.giuntiscuola.it/lavitascolastica/magazine/articoli/matematica-venti-consigli-per-un-amico-insegnante/

Duval, R. (2018), Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 211-245.

Notas

1 Professeur honoraire à la Université du Littoral Côte d'Opale, Dunkerque (Francia).



Circulo central		Primera corona		Segunda corona	
Unidades figurales 2D/2D	Unidades figurales 1D/2D	Unidades figurales 2D/2D	Unidades figurales 1D/2D	Unidades figurales 2D/2D	Unidades figurales 1D/2D
12	12	72	72	40 (alt.4,4,2)	40

Gabriele Gelatti, *El triángulo más bello*. 2016.
La división de tres círculos concéntricos en 12 unidades figurativas 2D/2D y 12 unidades figurativas 1D/2D.

Aprender la matemática a veces es difícil:

¿cómo podemos ayudar a nuestros alumnos?

Martha Isabel Fandiño Pinilla[1], Bruno D'Amore[2]

Resumen

En este artículo proponemos una breve lista de sugerencias concretas y útiles basadas sobre nuestro trabajo cotidiano con docentes de varios países.

Palabras clave: aprender la matemática, errores de los aprendices, actividad del docente de matemática.

Algunos alumnos aprenden la Matemática rápidamente, otros necesitan de un poco más de tiempo. No es cuestión de mayor o menor inteligencia, el hecho es que cada uno de nosotros se relaciona diversamente con esta disciplina y con el aprendizaje en general. Por tanto, no debes pretender lo que no es posible pretender. Tienes que respetar el tiempo de aprendizaje de cada uno.

Entre más atractivo sea un argumento, más fácil será el éxito cognitivo. Por esto, evita la repetición aburrida y busca la forma de hacer interesante los argumentos. En este aspecto, la profesionalidad y la fantasía del docente ayudan mucho.

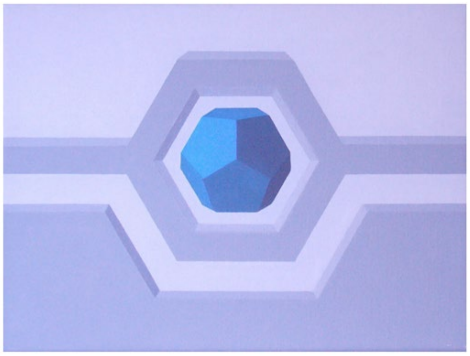
No hables únicamente de Matemática, busca que tus estudiantes hablen, especialmente entre ellos. Nosotros, de vez en cuando, escuchemos.

Haz que tus alumnos escriban de Matemática, incluso con dibujos, esquemas, bosquejos; propones actividades donde deban leer la Matemática, porque leer y entender la Matemática es algo que se aprende paso a paso, y esto será siempre más útil fuera de ámbito escolar. La investigación ha demostrado que para los niños y los adultos es muy difícil leer y entender un texto matemático, se requiere entrenamiento desde niños.

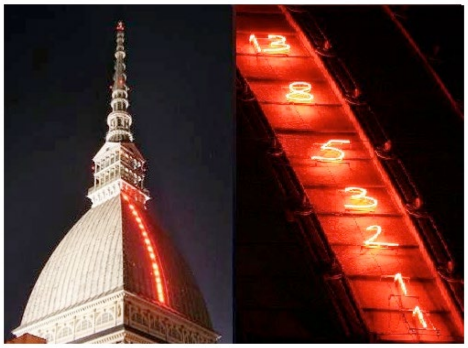
No tengas miedo del error en Matemática; cometer errores es necesario para aprender. Por tanto, no deplores quien se equivoca, siempre trata de entender la causa de este error y ayúdale a tus alumnos a entender con calma y afecto donde radica dicho error y sobre todo explica claramente las implicaciones que conlleva.

Recuerda siempre que un niño aprende mejor y más de un coetáneo capaz que de nosotros docentes: es necesario que los alumnos trabajen en grupo, discutiendo entre ellos los diversos puntos. Aprender Matemática es, en amplia medida, negociar sus significados y no sólo aceptarlos.

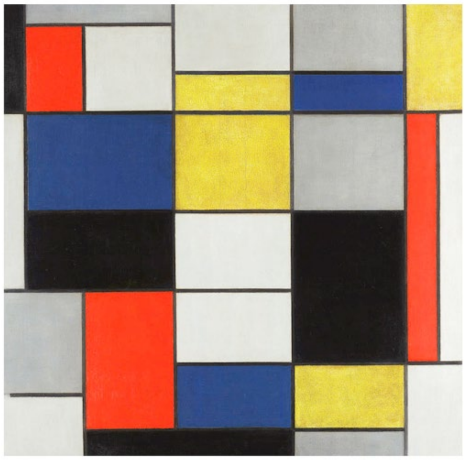
Propone actividades donde sean protagonistas el dibujo, las construcciones, las maquetas, siempre relacionadas con la Matemática, sin olvidar laberintos, recorridos, objetos. Que el alumno aprenda a ver la Matemática en todo. Por ejemplo, ayuda a evidenciar como en algunas obras de arte hay tanta Matemática, ya sea Aritmética como Geometría.



Lucio Saffaro, *Piccolo Olio*, olio su tela, 30×40 cm. Colección privada, Bogotá.



Mario Merz, *Il volo dei numeri* o *La successione di Fibonacci*. 2000. Torino.



Piet Mondrian, *Composizione A*. 1919. Galleria Nazionale d'Arte Moderna e Contemporanea. Roma.

Lorenzo Bocca. *Composizione n. 05. Trittico*. 2020. Acrilico su tavola. 60 ´ 50 cm. Colección privada, Flandes.

Evita la pedantería, deja siempre un margen de libertad; por ejemplo, antes de decir: “Te equivocaste”, piénsalo dos veces. ¿Y si la solución fuese correcta, sólo diversa de aquella que tu estabas esperando?

No des consejos inútiles, no ilusiones al estudiante con recetas, no creas en panaceas. Enseñar y aprender la Matemática es un acto difícil, de coraje y de sensibilidad, no de reglas de seguir.

No propongas actividades de resolver o de calcular únicamente; asigna tareas donde los alumnos tengan que inventar o discutir. Que de vez en cuando inventen ellos mismos problemas. Que no sean sólo y únicamente algoritmos, sino también dibujar, buscar, discutir, narrar. En ocasiones crear una poesía matemática ayuda y enseña mucho más que resolver un problema.

Busca siempre hacer entender que la Matemática fue creada por seres humanos para satisfacer algún requerimiento, ya sea concreto o abstracto, que evolucionó en el tiempo y que continúa a evolucionar, que en el mundo hay miles de matemáticos que cada día crean teorías y demuestran teoremas. ¡Y qué problema si no fuese así!: todo lo que el ser humano inventa se basa en la Matemática y en sus teoremas, el PC, las tabletas, los celulares y sus aplicaciones, muchos de los instrumentos médicos, aéreos, autos, TV, los algoritmos de seguridad, … todo.

La Matemática tiene una gran historia y la historia de la humanidad está condicionada en gran parte por el desarrollo de la Matemática; de vez en cuando narra aspectos de esta gran historia adaptada a los alumnos.

Para enseñar la Matemática dándole sentido y no sólo reglas, es necesario conocerla. Con humildad pregúntate: Debo afrontar este argumento con mis alumnos; ¿lo conozco lo suficiente, de adulto, de forma crítica? ¿O sólo sé exactamente lo que voy a enseñar? Si tienes dudas, no tengas miedo: estudia la Matemática, no en los libros destinados a los alumnos, sino en textos de Matemática verdaderos, pensados y escritos para profesionales.

No pretendas que tus alumnos aprendan cosas inútiles, elige siempre los que consideres pertinente y útil.

Sustenta tu actividad profesional en la formación didáctica; estudia con pasión un texto de Educación matemática, no de recetas, no de banales jueguitos, no de “métodos” inventados por no expertos, sino en textos basados en la investigación. La investigación en Educación matemática existe desde hace medio siglo y ha proporcionado un gran número de resultados científicos concretos. No los ignores, evita repetir los errores que muchos docentes no preparados e ingenuos cometen cada día, destruyendo así el amor que espontáneamente los alumnos tienen hacia la Matemática. La Educación matemática no coincide con la experiencia; es más, en muchos casos la contradice.

Muestra que en Matemática no hay ninguna “regla”, que todo lo que se hace tiene un sentido lógico, que siempre hay explicación para todo.

Convence a tus alumnos que te gusta enseñar Matemática y que amas ver como cada uno la aprende, quien más, quien menos.

Enseña la Matemática con amor.

Notas

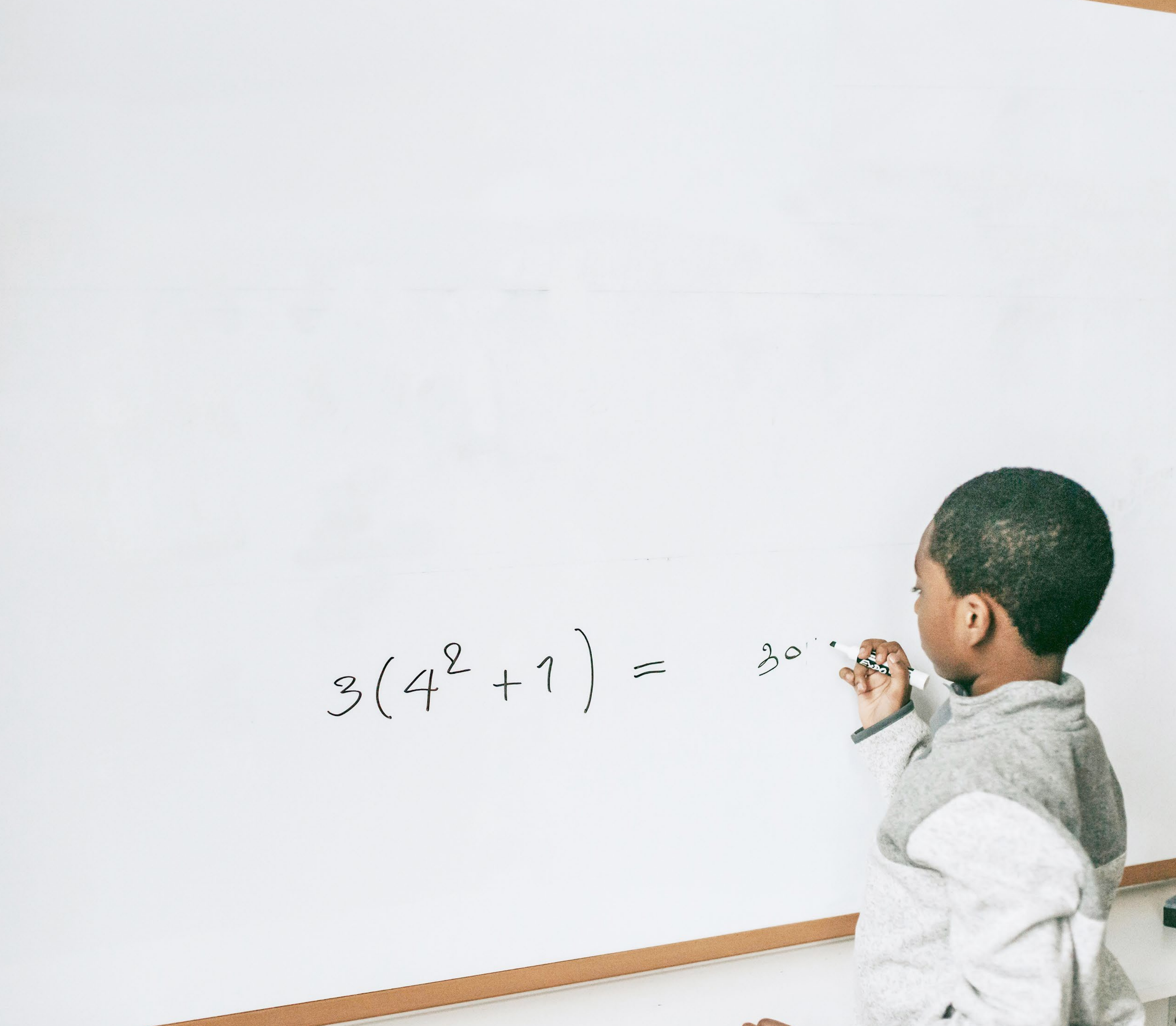
1 Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna (Italia).

2 Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia).

Evaluación de la matemática a larga escala e investigación en educación matemática

Nuevas pruebas de contrato didáctico

Federica Ferretti[1]



Resumen

En la siguiente contribución, presentaremos brevemente un nuevo efecto de contrato didáctico, surgido de un macrofenómeno sacado a la luz en la evaluación nacional a gran escala de la matemática.

Palabras clave: evaluación nacional de matemática a gran escala, contrato didáctico, edad de la Tierra.

Paralelamente al desarrollo de las experiencias internacionales más importantes (OCDE-PISA, IEA-TIMSS, IEA-PIRLS), en las últimas décadas casi todos los países han introducido evaluaciones nacionales de aprendizaje a gran escala en primaria y secundaria (Looney, 2011). Como se destaca en la literatura, el impacto institucional de las evaluaciones a gran escala también tiene fuertes consecuencias a nivel de aula y, por lo tanto, en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Estas pruebas, construidas con el objetivo de evaluar el aprendizaje de la matemática a nivel de sistema, tienen cada vez más implicaciones desde las perspectivas educativa, didáctica, histórico-cultural y política, tanto a nivel local como global (Doig, 2006). Todo esto ha llevado a que las evaluaciones estandarizadas a gran escala se hayan convertido, en distintas ocasiones, en objeto de investigación en educación matemática (De Lange, 2007, Meinck et al., 2017).

En Italia las evaluaciones nacionales a gran escala son administradas por el INVALSI (www.invalsi.it), organismo de investigación que, entre otras tareas, realiza controles periódicos y sistemáticos de los conocimientos y competencias de los alumnos y de la calidad global de la oferta educativa de los centros de enseñanza. La coherencia del marco teórico de la prueba de matemática del INVALSI con las Indicaciones Curriculares ministeriales y los principales resultados de la investigación en didáctica de la matemática, así como el diseño de las pruebas y la forma en que se devuelven los datos (INVALSI, 2018), hacen que los macrofenómenos destacados en la prueba nacional puedan proporcionar información útil y convertirse en herramientas interpretativas de algunos aspectos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Los análisis cualitativos y cuantitativos de los textos y de los resultados de las pruebas INVALSI han aportado numerosas contribuciones a la investigación en educación matemática por parte de diversos investigadores italianos. Las principales fueron presentadas por el grupo de investigación coordinado por la autora de esta contribución en el Seminario Nacional de Investigación en Educación Matemática 2023 (https://www.airdm.org/seminario-nazionale/xxxix-seminario-nazionale-in-didattica-della-matematica/).

Los resultados obtenidos están dialécticamente conectados con algunos de los resultados de investigación más importantes y compartidos en didáctica de la matemática, al tiempo que llaman la atención de la comunidad investigadora sobre nuevos fenómenos y nuevas características de fenómenos ya conocidos. El enfoque de investigación que une nuestros estudios es el uso de evaluaciones a gran escala como herramienta de reflexión, análisis e investigación sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de los estudiantes italianos.

Las evaluaciones a gran escala son evaluaciones del sistema y tienen como objetivo el seguimiento de un sistema educativo y la verificación de la aplicación de los programas ministeriales. La información devuelta por estas evaluaciones, cuando es coherente con el sistema educativo, puede integrarse en las prácticas escolares desde una perspectiva formativa.

Uno de los principios que guían nuestra investigación en este campo es una visión fenomenológica de la interacción del investigador con los procesos de enseñanza-aprendizaje; en nuestros estudios partimos de una observación ecológica de lo que perciben y detectan en el campo los distintos actores del sistema (investigadores, profesores, alumnos, INVALSI, etc.), teniendo en cuenta, no obstante, que esta percepción y esta detección están, a su vez, enmarcadas y condicionadas por creencias, teorías, etc. Pero es precisamente esta dialéctica entre fenomenología y teorías la que permite la evolución.

Toda nuestra investigación se basa también en una visión formativa de la evaluación en matemática. Las evaluaciones en el aula y las evaluaciones a gran escala tienen objetivos y fines diferentes. Las evaluaciones a gran escala son evaluaciones del sistema y tienen como objetivo el seguimiento de un sistema educativo y la verificación de la aplicación de los programas ministeriales. La información devuelta por estas evaluaciones, cuando es coherente con el sistema educativo, puede integrarse en las prácticas escolares desde una perspectiva formativa. La coherencia con el contexto educativo en el que se inscriben los procesos de enseñanza y aprendizaje objeto de nuestra investigación es un hecho esencial, como lo es encontrar en las pruebas del INVALSI ejemplos de preguntas que estén en consonancia con los objetivos planteados en las indicaciones nacionales.

Sin embargo, esta coherencia declarada de las pruebas con el plan de estudios previsto debe ir acompañada de un análisis de la coherencia de las propias pruebas con las prácticas reales presentes en las escuelas italianas, que forman parte del plan de estudios aplicado. La investigación siempre ha considerado como elemento esencial tanto del diseño de los planes experimentales como de la interpretación de los resultados, la red de relaciones entre estos tres elementos: las Indicaciones Nacionales, las pruebas efectivamente enviadas sobre el terreno por el INVALSI y las prácticas declaradas o detectadas en el contexto.

Desde el punto de vista metodológico, en el sentido de técnicas de recolección e interpretación de datos soportadas en el sistema de principios, nuestros estudios han utilizado métodos mixtos, incorporando los materiales de las pruebas INVALSI en diseños tanto explicativos como exploratorios. Una investigación de métodos mixtos consiste esencialmente en dos o más componentes o tendencias de investigación desde diferentes perspectivas metodológicas - en la mayoría de los casos cualitativa y cuantitativa. Uno puede combinar los componentes entre sí, si el objetivo de la investigación es unir y vincular mutuamente los resultados de cada uno, o integrar los componentes entre sí, si el objetivo es la validación mutua de los resultados de la investigación.

En todos nuestros estudios, la primera fase consiste en integrar los dos componentes. De hecho, la investigación que vamos a presentar parte de una primera fase común de identificación de lo que hemos denominado macrofenómenos que emergieron durante la evaluación del INVALSI.

El macrofenómeno es un hecho complejo, que surge de la integración de dos componentes, uno cualitativo y otro cuantitativo, integrados y complementarios. La información cuantitativa proviene, de las evaluaciones del INVALSI y este es uno de los elementos que caracteriza fuertemente nuestra investigación: la información del componente cuantitativo del macrofenómeno se obtiene a partir de un marco de las pruebas designado y realizado por un organismo nacional de investigación. De ahí la necesidad, en nuestros estudios, de compartir el marco teórico sobre el que se construyen las preguntas, los métodos de recogida de datos, los análisis realizados y los métodos de devolución de los datos, tanto a nivel de la muestra nacional como a nivel local de cada centro educativo. La fase cualitativa del macrofenómeno está a cargo de investigadores expertos en didáctica de las matemáticas que, con las lentes interpretativas que proporcionan algunos de los resultados de investigación más consolidados y compartidos, analizan e interpretan los resultados del INVALSI que esbozan el macrofenómeno. A partir de esta primera fase común, cada investigación se caracteriza por preguntas de investigación específicas y las consiguientes instalaciones metodológicas destinadas a responderlas.

Las demás fases de la investigación son a veces cuantitativas, utilizando datos de instalaciones experimentales *ad hoc*, a veces cualitativas y a veces de métodos mixtos.

Algunos de nuestros estudios, en línea con este enfoque de investigación, han permitido caracterizar, cuantificar y medir el alcance de diversos macrofenómenos; otros han sacado a la luz nuevas evidencias e interpretaciones vinculadas a los propios fenómenos (nuevos fenómenos como el efecto de contrato didáctico “Edad de la Tierra”). El grupo de investigación también se ha ocupado del estudio de cómo estos macrofenómenos pueden constituir un ingrediente de la formación del profesorado, con qué herramientas y qué modelos.

Efecto del contrato didáctico: “Edad de la Tierra”

El punto de partida de la investigación que condujo a la definición del efecto es un fenómeno educativo que se observó en dos preguntas de las pruebas de matemáticas INVALSI, realizadas en Italia a todos los alumnos del Grado 10 (segundo curso de secundaria). La primera pregunta, administrada de forma censal a unos 600 000 alumnos italianos de Grado 10 curso de todos los planes de estudios se muestra en la Figura 1.

D5. L'età della Terra è valuata intorno al 4,5 x 10^9 anni. L'homo Erectus è comparso circa 10^6 anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?
☐ A. 4,5 x 10^9 anni ☐ B. 3,5 x 10^9 anni ☐ C. 4,5 x 10^6 anni ☐ D. 4,5 x 10^3 anni
Traducción: La edad de la Tierra se estima en unos 4,5 x 10^9 años. El Homo Erectus apareció hace unos 10^6 años. ¿Cuál es la estimación más cercana a la edad que tenía la Tierra cuando apareció el Homo Erectus?

Figura 1. Tarea D5, Grado 10 - Prueba INVALSI de Matemáticas 2011

El siguiente gráfico (Fig. 2) muestra los resultados con referencia a una muestra estadística representativa a escala nacional de aproximadamente 45000 estudiantes.

Como puede verse en la Figura 4, las respuestas correctas (opción A) fueron el 10,2 %. La opción incorrecta más elegida es la opción D, donde el exponente de la potencia es la diferencia de los exponentes de las potencias en el texto. Una situación equivalente, matemáticamente hablando, se presentó en la prueba INVALSI 2013 para Grado 10. La pregunta (Figura 3) se administró a 560000 estudiantes de las clases de segundo ciclo de cada vía escolar y la muestra consistió en aproximadamente 40000 estudiantes.

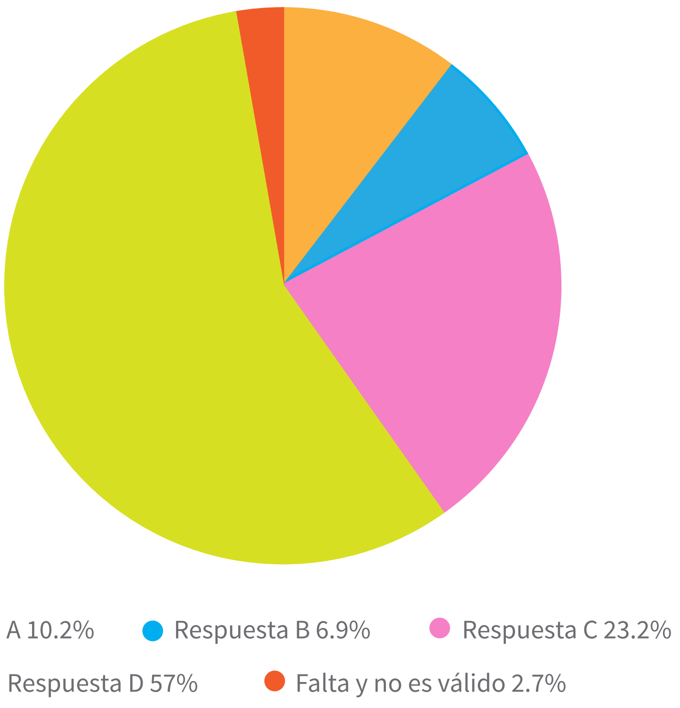


Figura 2. Porcentajes Muestra Nacional, Tarea D5, Grado 10 - Prueba INVALSI de Matemáticas 2011, www.gestinv.it

D6. Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa m_p è all'incirca $2 . 10^{-27}$ kg, e un elettrone la cui massa m_e ` all'incirca $9 . 10^{-31}$ kg.
Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè m_p+m_e)?

- ☐ A. $2 . 10^{-27}$ kg
- ☐ B. $11 . 10^{-31}$ kg
- ☐ C. $11 . 10^{-58}$ kg
- ☐ D. $18 . 10^{-58}$ kg

Traducción:

Un átomo de hidrógeno contiene un protón cuya masa m_p es aproximadamente $2 . 10^{-27}$ kg, y un electrón cuya masa m_e es aproximadamente $9 . 10^{-31}$ kg.
¿Cuál de las siguientes opciones se aproxima mejor a la masa total de átomo de hidrógeno (es decir, $m_p + m_e$)?

Figura 3. Tarea D6, Grado 10 - Prueba INVALSI de Matemáticas 2013

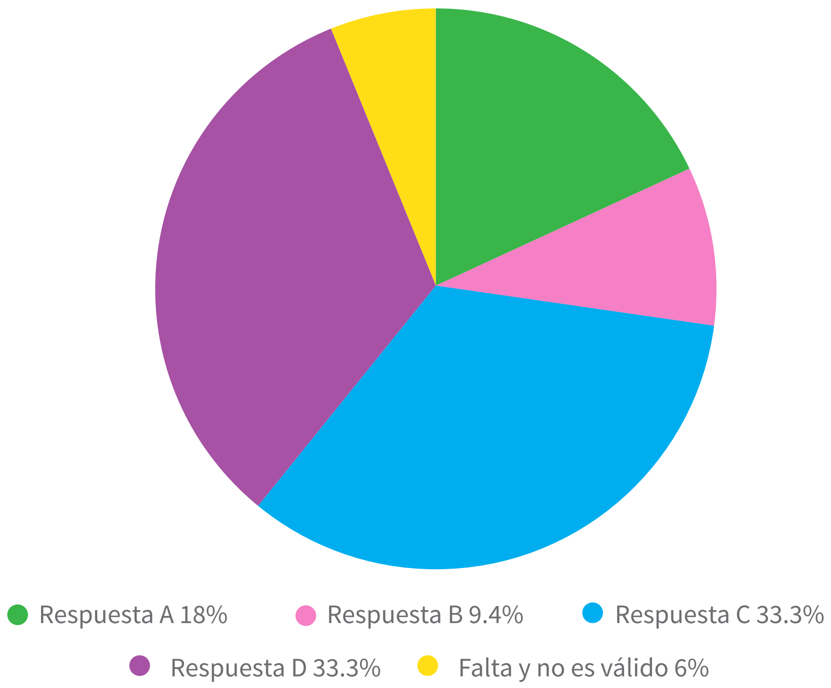


Figura 4. Resultados - Muestra Nacional, Tarea D6, Grado 10 - Prueba INVALSI de Matemáticas 2013, www.gestinv.it

Como muestran los resultados (Figura 4), el 18 % de las respuestas fueron correctas. Analizando los porcentajes de elección de las opciones erróneas, se observa que las opciones C y D, en las cuales el exponente de la potencia se obtiene sumando los exponentes de las potencias del texto, son las más elegidas a nivel nacional (más del 30 % de elecciones cada una).

Las primeras interpretaciones del fenómeno puesto de relieve por la pregunta “Edad de la Tierra” vinculaban genéricamente el comportamiento de los alumnos a los efectos de contrato didáctico en el sentido de Brousseau (Brousseau, 1997) y a la falta de control crítico sobre los contenidos. En particular, el hecho de que la mayoría de los alumnos en la pregunta “Edad de la Tierra”, cuyo texto recuerda intuitivamente una situación sustractiva, elijan la opción D en la que el exponente de la potencia es la diferencia de los exponentes de las potencias en la entrega podría aparecer como un ejemplo evidente de la presencia de la cláusula de contrato didáctico denominada delegación formal (D’Amore, 2007); al igual que en la pregunta “Masa del protón” (situación aditiva) la mayoría de los alumnos eligen las opciones C y D (en las que aparece la suma de los exponentes de las potencias).

Sin embargo, observamos otro hecho, que se manifiesta en ambos casos: la respuesta correcta es uno de los datos explícitamente presentes en el texto de la pregunta. En dos preguntas administradas a alumnos de Grado 8 se pueden encontrar situaciones similares. Estos cuatro ejemplos, que difieren en muchos aspectos del enunciado, el contexto, el contenido y la habilidad requerida, tienen en común la dificultad que surge cuando la respuesta coincide con uno de los datos de partida, dificultad que inesperadamente también afecta a alumnos con niveles de habilidad media y alta en la prueba. Estas observaciones dieron lugar a una investigación que condujo a la definición de un nuevo efecto de contrato didáctico denominado efecto “Edad de la Tierra”. En concreto, dentro de la investigación se investigó y definió el efecto y el principio regulador que lo determina. En detalle, el efecto observado puede describirse del siguiente modo:

En una situación de enseñanza, ante una entrega, los alumnos tienden a no aceptar una respuesta que no pueda identificarse claramente con un resultado distinto de los datos de partida.

La hipótesis de la investigación es que este efecto depende de un principio regulador (que, en un primer análisis, parece derivarse de las prácticas en el aula) del tipo:

El resultado de un problema o de una operación no puede ser el mismo que el punto de partida.

Se investigó si el fenómeno se produce en distintos dominios matemáticos, si afecta a todos los niveles escolares, si está presente en alumnos con distintas capacidades matemáticas, si depende del control semántico del alumno sobre el contenido de la pregunta y de las distintas capacidades matemáticas y, por último, si es posible cuantificarlo. En segundo lugar, se investigó si el comportamiento de los alumnos en los que se observa el efecto depende de un principio regulador próximo al enunciado. Para responder a las preguntas de investigación, se llevó a cabo un experimento que constaba de fases cuantitativas y cualitativas en el que participaron aproximadamente 650 alumnos del primer y segundo ciclo de enseñanza. Los resultados muestran que el efecto se manifiesta en todos los niveles escolares investigados y no depende ni del control semántico de la situación propuesta ni de la habilidad matemática con respecto al contenido investigado. La ampliación del marco teórico de partida permitió encuadrar las entrevistas realizadas por los alumnos y, por tanto, el principio regulador que determina el efecto. La investigación muestra que el efecto se manifiesta en menor medida con respecto a las preguntas del ámbito de la geometría. Las principales conclusiones de la investigación se publicaron en Ferretti y Bolondi (2019).

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

D’Amore, B. (2007). Epistemologia, didattica della matematica e pratiche d’insegnamento. *La matematica e la sua didattica*, *21*(3), 347-369.

De Lange, J. (2007). Large-scale assessment and mathematics education. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 1111-1144.

Doig, B. (2006). Large-scale mathematics assessment: looking globally to act locally. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 13*(3), 265–288.

Ferretti, F., Bolondi, G. (2019). This cannot be the result! The didactic phenomenon “the Age of the Earth”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(2), 194-207.

INVALSI (2018). Quadro di riferimento delle prove di INVALSI di matematica. Retrieved from https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf

Looney J.W. (2011). Integrating Formative and Summative Assessment: Progress Toward a Seamless System?, *OECD Education Working Papers, 58,* OECD Publishing.

Meinck, S., Neuschmidt, O., & Taneva, M. (2017). Workshop Theme: “Use of Educational Large-Scale Assessment Data for Research on Mathematics Didactics”. En: G. Kaiser (Ed.) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education.* ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3132.

Notas

1 Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática, Departamento de Matemática, Universidad de Bolonia. Departamento de Matemática e Informática, Universidad de Ferrara.

Sobre la necesidad de una cultura estadística y probabilística

Cristian Camilo Fúneme Mateus[1]

Resumen

En este artículo se presenta una revisión de algunos avances teóricos alcanzados en la Educación matemática, específicamente en relación con la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad. Utilizando estos aspectos como eje central, se discute una situación didáctica y un problema económico afrontado por la sociedad en el año 2008. Se destaca cómo la carencia del desarrollo de la cultura estadística y probabilística deja expuestos a los ciudadanos a manipulaciones y estafas, lo que revela la importancia del desarrollo de prácticas educativas que reconozcan los aportes de la visión científica de la Educación matemática.

Palabras clave: aprendizaje de la probabilidad, cultura estadística, cultura probabilística, educación matemática.

Cuando se habla de la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad, y en general de la Matemática, se suelen hacer señalamientos sobre múltiples problemas que existen alrededor de estos procesos. Esto ha llevado al desarrollo de diversas investigaciones alrededor del mundo que buscan, por ejemplo, comprender por qué existen esas dificultades, establecer soluciones, identificar aspectos que se deben evitar y mejorar, etc. No obstante, los problemas persisten y la percepción negativa de los estudiantes sobre el aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad es muy fuerte.

La respuesta que más eco ha tenido ante las dificultades que experimentan los estudiantes, al aprender matemática, es la generación de formas alternativas de enseñanza, esto a pesar de la evidencia científica que existe del fracaso de esta forma de concebir la Educación matemática. Por ejemplo, Brousseau (1986) muestra que centrarse únicamente en ¿cómo enseño? lleva a propuestas que generan una ilusión sobre el aprendizaje de los estudiantes, ilusión que se desvanece fácilmente tan pronto llega una evaluación externa (Pruebas nacionales o internacionales), la cual usualmente pone en evidencia que tal aprendizaje no existe y que los estudiantes simplemente han adoptado una forma de responder a las demandas del docente en la clase. Con mayor precisión, estas formas de responder de los estudiantes a las actividades que propone el profesor son evidencia de lo que se conoce como efectos del *Contrato didáctico*, fenómeno didáctico que define Brousseau (1980) y del cual se realizan estudios detallados en Sarrazy (1995) y D'Amore et al. (2018).

Ahora bien, el hecho de que la búsqueda constante y global de alternativas de enseñanza sea la de mayor exhibición y propaganda comercial, no significa que no existan investigaciones profundas, serías y desarrolladas desde una visión científica de la Educación matemática. Cada vez son más los trabajos que abordan a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática como procesos complejos, dinámicos, de carácter histórico, social y cultural que implican múltiples dimensiones a considerar en la clase: epistemológica, ontológica, pedagógica, didáctica, cognitiva, ética, semiótica, emocional, etc. No es el objetivo de este breve escrito el precisar todas las líneas de investigación existentes, las teorías desarrolladas y las comunidades que aportan constantemente al desarrollo de la Educación matemática como una disciplina científica, sobre este aspecto puede leerse por ejemplo a Rico et al. (2000), Godino (2003), D'Amore (2023), D'Amore y Fandiño (2020), D'Amore et al. (2023). En su lugar, se describen algunos aspectos alusivos a la Estadística y la Probabilidad en la educación básica.

Entre los aspectos que sin lugar a duda ocupan un lugar central en la investigación en Educación matemática, se encuentra el comprender la naturaleza de los objetos que se pretenden enseñar y aprender. En el caso particular de la Estadística se ha avanzado notablemente en la precisión de cuál es su naturaleza y cuál es la finalidad de su enseñanza y aprendizaje, por ejemplo, con la Estadística en las aulas de clase se estudia y describe fenómenos realizando previsiones de cara al futuro, es decir, trabaja en el ámbito de la incertidumbre, por lo tanto, se aborda una cultura no determinista del análisis de datos reconociendo la necesidad de su recolección oportuna (Batanero et al., 2013). Además, con la Estadística se desarrolla la capacidad para interpretar y evaluar críticamente información (Gal, 2002), lo que lleva a la competencia para comunicar los significados de los datos en forma que sea comprensible para otros (Arteaga et al., 2011). Incluso, con la Estadística se realizan predicciones y explicaciones de las causas de la variación en diferentes contextos, esto a través del establecimiento de modelos para fenómenos en los que está presente la aleatoriedad (Batanero, 2015).

Los anteriores son solo algunos aspectos, lo más importante es que la mecanización de algoritmos y memorización de fórmulas estadísticas no aparece. Esto no quiere decir que no sea importante que el estudiante conozca y maneje las expresiones que permiten calcular un promedio, una desviación estándar o cualquier otra estadística, lo que esto significa es que la finalidad de la educación estadística no es generar un sujeto netamente cognitivo que replique fórmulas sin pestañear, pero que no sea capaz de interpretar críticamente información estadística.

Más aún, un aspecto importante en los diferentes trabajos en que se aborda la naturaleza del razonamiento estadístico es el reconocimiento de la incertidumbre, la aleatoriedad, la inferencia y la variación como el corazón de las prácticas que se desarrollan en esta área del conocimiento. De ahí que en el ámbito internacional se reconozca y exalte frecuentemente que el fin de la educación estadística es el desarrollo de la cultura estadística en los estudiantes, lo cual implica el desarrollo de la capacidad para recolectar, describir, interpretar, evaluar, discutir y comunicar información estadística (Gal, 2002).

Desde el punto de vista didáctico la cultura estadística implica en la formación del profesor como mínimo: (1) la reflexión epistemológica sobre el significado de los objetos que pretende enseñar; (2) el análisis de las transformaciones del conocimiento para adaptarlo a los distintos niveles de enseñanza; (3) el estudio de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y las estrategias para abordarlos; y (4) el análisis del currículo, situaciones didácticas, metodología de enseñanza y recursos didácticos específicos (Batanero, 2002).

Además, con la Estadística se desarrolla la capacidad para interpretar y evaluar críticamente información (Gal, 2002), lo que lleva a la competencia para comunicar los significados de los datos en forma que sea comprensible para otros (Arteaga et al., 2011).

En cuanto a los estudiantes, la cultura estadística busca que reconozcan la necesidad de los datos estadísticos, desarrollen transnumeraciones, perciban la variación en los datos, razonen a partir de modelos estadísticos e integran todos esto en el análisis de situaciones de su contexto (Arteaga et al., 2015). Esto implica que ante la representación gráfica o numérica de datos estadísticos el estudiante tenga la competencia para leer los datos (identificarlos o describirlos), leer entre los datos (extraer tendencias, relaciones, cálculos o comparaciones), leer más allá de los datos (analizar su estructura o efectuar predicciones) y leer detrás de los datos (extraer conclusiones de la recolección de los datos) (Curcio, 1987; Gea et al., 2017).

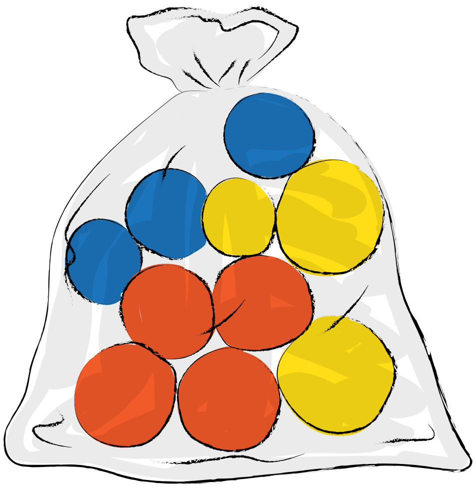
Este tipo de precisiones se han desarrollado también para la Probabilidad, pues desde el punto de vista didáctico su enseñanza y aprendizaje requiere de aspectos muy puntuales y diferenciales. De hecho, ante las diferencias que existen entre el estudio de la Estadística descriptiva y de la Probabilidad, surgió el concepto de *Cultura probabilística* como aquel que recoge la comprensión de las ideas fundamentales de la Probabilidad, la competencia mínima para obtener probabilidades, el dominio del lenguaje del azar, la capacidad para interpretar una probabilidad en términos de un contexto y para plantear preguntas críticas sobre ella (Batanero, 2015).

Nuevamente desde el punto de vista de lo que esto significa para la formación del profesor, se mantienen los elementos ya descritos en la cultura estadística, pero surgen como aspectos adicionales: (1) la gestión de actitudes positivas ante la Probabilidad que le permitan valorarla, estar dispuesto y seguro de aprenderla y enseñarla; (2) control de creencias infundadas sobre el azar y la influencia de estas sobre sus interpretaciones; y (3) comprender los propios sentimientos sobre la incertidumbre (Lilleholt, 2019).

Por parte del estudiante, se busca que desarrolle su razonamiento probabilístico reconociendo que este se caracteriza por el trabajo con fenómenos aleatorios en los cuales predomina la incertidumbre, la búsqueda de credibilidad de la evidencia y el desarrollo de la intuición para emitir juicios a partir de la fuerza de la inferencia (Fischbein, & Schnarch, 1997). Este razonamiento incluye el comprender los diferentes significados de la probabilidad (Batanero, 2005), reconocer la diferencia entre resolver un problema de probabilidad y usar la probabilidad para la toma decisiones (Borovcnik, 2016), comprender que no existen criterios directos o algoritmos para lograr un resultado deseado en situaciones aleatorias, capacidad para discriminar aleatoriedad y causalidad, tomar conciencia de la influencia de las probabilidades previas, reconocer la asimetría de las probabilidades condicionales e interpretar correctamente las probabilidades pequeñas (Batanero et al., 2023).

En resumen, la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad requiere como mínimo del reconocimiento de su naturaleza de incertidumbre, de aleatoriedad y azar, además del dominio histórico, epistemológico, didáctico y emocional por parte del docente de la Probabilidad y del desarrollo del razonamiento probabilístico en el estudiante. Pero ¿qué pasa cuando desconocemos este tipo de avances de la Educación matemática? Recordemos que iniciamos destacando que existe evidencia de los problemas que se producen al no reconocer la visión de la Educación matemática, veamos un ejemplo de ello.

Empecemos por una situación netamente académica. Para la educación básica en Colombia se propuso una colección de textos de matemáticas que fue distribuida en la mayoría de instituciones educativas públicas. Tomamos de ella la siguiente situación omitiendo el nombre del texto para evitar señalamientos, en su lugar nos centramos en el aspecto didáctico.



Se le han tapado los ojos a Juan
y se le ha pedido sacar una
bola de la bolsa. Es más probable
que la bola se de color:

A. Amarillo
B. Azul
C. Rojo

Se solicitó a 60 estudiantes (10 a 11 años de edad) de grado quinto de básica primaria (la situación está diseñada para ese nivel educativo) resolver la situación. El 65% de los estudiantes respondió que la opción b (azul) era correcta. Cuando se lee la explicación del libro, en la guía que se entrega al profesor, se plantea como solución:

Probabilidad bola amarilla: $\frac{3}{10}$

Probabilidad bola azul: $\frac{3}{10}$

Probabilidad bola roja: $\frac{4}{10}$

Por lo tanto, es más probable que la bola que Juan saque sea de color rojo.

Es decir, los creadores del texto esperan que el estudiante solucione la situación a través de la aplicación del significado Laplaciano de la probabilidad (Batanero, 2005), es decir que emplee la regla de Laplace de número de casos favorables dividido en el número de casos totales. ¿Qué les pasó a los estudiantes? ¿Simplemente no saben calcular la probabilidad? Al preguntar a los estudiantes uno de ellos explicó claramente lo ocurrido: «Arriba de la bolsa están las bolas azules, como son las primeras va a sacar una de esas».

Entonces, ¿la respuesta muestra una dificultad en el aprendizaje de los estudiantes? o ¿es desconocimiento de quien propone la situación, respecto a la necesidad de hacer explícita la aleatoriedad a través de alguna acción que implique que todos los acontecimientos son igualmente probables? esto considerando que Laplace declara que su fórmula funciona en un ámbito de equiprobabilidad. La argumentación del estudiante es válida, desde su percepción hay un evento de mayor posibilidad de ocurrencia en las condiciones de la situación. Se podría pensar que esto no tiene mayor importancia, que basta con que el profesor aclare que para calcular la probabilidad se emplea la fórmula de Laplace, pero ¿cuál es la implicación de acabar con este pensamiento intuitivo del estudiante sobre la probabilidad? Veámoslo ahora en un ejemplo de la vida real.

En el 2015 se estrenó la película *La gran apuesta*, dedicada a la crisis económica originada por la burbuja inmobiliaria en el año 2008. Esta película inicia con la frase de Mark Twain: «Lo que te mete en problemas no es lo que no sabes, es lo que estás seguro que sabes pero que simplemente no es así». Esto resume lo ocurrido con la manipulación del concepto de probabilidad por parte de agentes que ofrecían bonos hipotecarios en los Estados Unidos.

La búsqueda de una cultura estadística y probabilística no es un capricho intelectual o un discurso vacío de los académicos, es una necesidad real, que tiene una relación directa con la vida de las personas.

Para resumir la situación, a los inversores se les ofrecía diferentes paquetes de créditos hipotecarios dependiendo del nivel de riesgo. La forma de diferenciarlos era a través de la denominación A (alto riesgo) para aquellas hipotecas que habían sido otorgadas a personas con baja liquidez, AA (riesgo medio) que hacían referencia a hipotecas en las cuales se prometía como mínimo la recuperación de las inversiones, AAA (bajo riesgo) para aquellas en las que estaba garantizado el pago con propiedades de un alto nivel de valorización y luego los tipo B que eran aquellas otorgadas a personas sin hacer un estudio de su estado financiero y por lo tanto mayoritariamente correspondientes a créditos hipotecarios que no se pagaban. Esta clasificación era realizada por agencias de calificación quienes, además, determinaban una probabilidad de pago, de manera que para ser denominado AAA se debía tener mínimo un 93% de probabilidad de pago de los créditos hipotecarios.

Es decir, si a un inversor le plantean que cuenta con un 93% de probabilidad de pago, es fácil pensar que es una inversión muy conveniente, así lo pensaron desde los bancos y empresarios hasta los pequeños inversionistas. Pero ¿basta con una probabilidad alta para anticipar un resultado? Pensemos en el ejemplo inicial del texto de grado quinto, la probabilidad de sacar una bola roja era de 4/10 y era la mayor, entonces ¿era suficiente para considerarlo como el evento más probable? o era necesario ver las condiciones detrás de la situación y del cálculo de las probabilidades como lo pensaron los estudiantes.

Precisamente, la crisis inmobiliaria y económica del año 2008 ocurrió porque las personas asumían el 93% de probabilidad como una garantía determinística. Omitieron que así sea solo el 7% de probabilidad de no pago, existe una incertidumbre sobre lo que puede pasar. Más importante aún, demostraron que existía un desarrollo nulo del razonamiento probabilístico, pues no consideraron la diferencia entre el valor de una probabilidad y usar la probabilidad para la toma decisiones, no comprendieron que no existen algoritmos que garanticen un resultado deseado en situaciones aleatorias, omitieron que la probabilidad no implica causalidad. Más aún, olvidaron un principio fundamental del razonamiento estadístico, no basta con conocer los datos y cómo interpretarlos, es fundamental conocer el origen de ellos, cuáles son las condiciones bajo las cuales se recolectaron y calcularon.

Este último elemento explica porque existieron tantas personas afectadas por la crisis del 2008, pues los inversores no se preocuparon por conocer la forma en que se determinaba el 93% de probabilidad de pago. La primera forma era a través de la capacidad de pago de los responsables de las hipotecas, es decir hipotecas de categoría AAA con las cuales el 7% de no pago se puede pensar como bajo y por tanto una buena inversión, pero existía otro camino. Se podían reunir varias hipotecas de calificación B, A o AA en lo que se denominó un CDO (Collateralized Debt Obligati), de manera que, al contar con un número considerables de ellas, aportando cada una un pequeño porcentaje, se llegaba al famoso 93% y por tanto a la denominación AAA. Con esto, la mayor parte de inversores realmente llevaron su dinero a paquetes de hipotecas del más alto riesgo de no pago para terminar perdiendo su dinero.

Este es solo un ejemplo de muchas situaciones cotidianas en las que se hace un uso equivocado de la noción de probabilidad llevando a las personas a fracasos principalmente económicos. El bajo nivel de razonamiento probabilístico lleva a muchos ciudadanos a ser presas fáciles de estafas, productos y servicios en los que pierden sus recursos, por ejemplo, en casinos, apuestas deportivas, pirámides, etc. Esto es una muestra de las implicaciones de no reconocer y llevar al aula el conocimiento científico que nos otorga la Educación matemática. La búsqueda de una cultura estadística y probabilística no es un capricho intelectual o un discurso vacío de los académicos, es una necesidad real, que tiene una relación directa con la vida de las personas.

Referencias bibliográficas

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., & Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *76*, 55-67.

Arteaga, P., Molina, G., Gea, M., & López, M. (2015). *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (2)*. Universidad de Granada. España.

Batanero, C. (2002). Estadística y didáctica de la matemática: Relaciones, problemas y aportaciones mutuas. En C. Penalva, G. Torregrosa & J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 95-120). Universidad de Alicante.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *RELIME*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C. (2015). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. En K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 34-49). ERME.

Batanero, C., Gea, M., & Álvarez, R. (2023). La educación del razonamiento probabilístico. *Educação Matemática Pesquisa*, *25*(2), 127-144.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J., & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas*, *83*, 7-18.

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(3), 1491-1516.

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 41*, 177-182.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 382-393.

D'Amore, B. (2023). Some specific historical elements on the evolution of 'Mathematics Education' as a research discipline. *Annales Accademia delle Scienze di Bologna*, *1*(1), 23-34.

D'Amore, B., & Fandiño, M. (2020). Historia del desarrollo de la Didáctica de la Matemática. Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS (Enfoque Onto-Semiótico). *Revista Paradigma*, *41*, 130-150.

D'Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2018). *El contrato didáctico en Educación Matemática*. Magisterio.

D'Amore, B., Pinilla, M., Asenova, M., Iori, M., Santi, G., & Fúneme, C. (2023). *Teorie rilevanti in Didattica della Matematica*. Bonomo. [Edición en español: 2024, Magisterio].

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105.

Gal, I. (2002). Conocimiento estadístico de los adultos. Significados, componentes, responsabilidades. *International Statistical Review*, *70*(1), 1–25.

Gea, M., Arteaga, P., & Cañadas, G. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 19-37.

Godino, J. (2003). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Lilleholt, L. (2019). Cognitive ability and risk aversion: A systematic review and meta-analysis. *Judgment and Decision Making*, *14*(3), 234-279

Rico, L. Sierra, M., & Castro, E. (2000). Didáctica de la matemática. En: L. Rico & D. Madrid (Eds), *Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares*. Síntesis.

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue francaise de pédagogie*, *112*, 85-118.

Notas

1 Licenciado y Magíster en Educación Matemática, Uptc. Magister en Ciencias – Matemática, Universidad Nacional de Colombia. Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad Francisco José de Caldas.

Formación matemática y didáctica de los profesores de educación primaria

Una mirada retrospectiva sobre el proyecto Edumat-Maestros

Juan D. Godino[1]

Resumen

La formación de profesores de matemáticas requiere tener en cuenta tanto el desarrollo de los conocimientos matemáticos como los correspondientes a la didáctica de la disciplina. Para ello los formadores de profesores deben disponer de modelos y recursos que orienten el diseño e implementación de programas y acciones formativas idóneas que contemplen la formación matemática y didáctica, así como su articulación. En este trabajo se describen los libros del Proyecto Edumat-Maestros como recursos para la formación matemática y didáctica de los maestros de educación primaria. Se analiza también el modelo implícito de los conocimientos didáctico-matemáticos implementado en dichos textos, así como la estrategia seguida para la articulación de la matemática y la didáctica.

Palabras clave: formación de maestros, matemáticas, didáctica, proyecto Edumat-Maestros.

Proyecto Edumat-Maestros

En el marco de un proyecto de investigación y desarrollo, conocido como proyecto Edumat-Maestros, iniciamos en el año 2002 la elaboración de una colección de monografías para la formación en matemáticas y didáctica de las matemáticas de profesores de educación primaria (Godino et al, 2004a; 2004b). En el año 2003 publicamos seis monografías donde presentamos los conocimientos matemáticos y didácticos de los distintos bloques de contenido: sistemas numéricos, proporcionalidad, estocástica, medida, geometría y razonamiento algebraico. En una monografía complementaria presentamos una perspectiva general de los fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los contenidos matemáticos y didácticos de las siete monografías fueron reagrupados en 2004 en dos libros: Matemáticas para maestros y Didáctica de las matemáticas para maestros. La finalidad de esta nueva agrupación era responder a los planteamientos de aquellas universidades en las cuales se optaba por enfocar la formación de los maestros introduciendo una separación entre los contenidos matemáticos y los didácticos. Todos estos libros se publicaron en la modalidad de acceso abierto, y están disponibles en el sitio web https://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/welcome.htm

Los libros del Proyecto Edumat-Maestros han tenido una acogida muy favorable como mostramos en la Figura 1 donde se refleja la estadística producida por Google Analitic sobre el sitio web donde están disponibles los libros. En el periodo de 10 años, entre 2011 a 2020 ha tenido un total de 234.934 visitas.

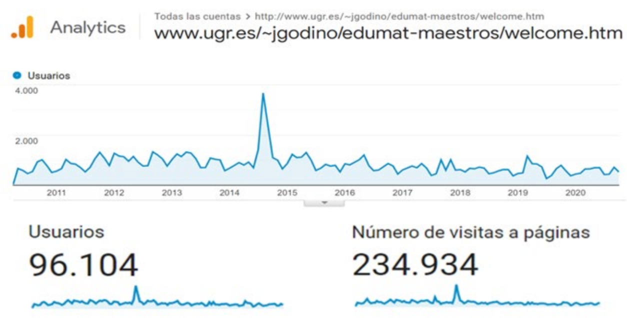


Figura 1. Visitas al sitio web de Edumat-Maestros según Google Analytics

Los libros Edumat-Maestros son considerados principalmente como recursos para el uso de los formadores de profesores y los estudiantes del grado de Educación Primaria y han recibido un número de citas notable en Google Scholar (Tabla 1), además de ser alojados en otros sitios web como academia.edu y researchgate.net.

Libro Edumat-Maestros	N.º de citas
Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas	943
Matemáticas para maestros	827
Didáctica de las matemáticas para maestros	742
Medida de las magnitudes y su didáctica	325
Estocástica y su didáctica	375
Razonamiento algebraico y su didáctica	214
Geometría y su didáctica para maestros	185
Sistemas numéricos y su didáctica	126
Proporcionalidad	87

Tabla 1. Número de citas en Google Scholar de los libros Edumat-Maestros

Modelo de análisis de los conocimientos didáctico-matemáticos

Existen diferentes modelos de categorías de conocimientos que deberían tener los profesores de matemáticas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes (p.e. Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Godino et al., 2017). La Figura 2 resume las categorías de los conocimientos didáctico-matemáticos propuestas por el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático, CDM (Pino-Fan y Godino, 2015). En la parte inferior de la Figura 2 incluimos también información sobre dos categorías de conocimientos del profesor relacionadas con la dimensión matemática, esto es, el conocimiento matemático *per se*, que el profesor debe tener. Según explicamos en Pino-Fan y Godino (2015), el conocimiento común del contenido es aquel conocimiento de un objeto matemático concreto, que es suficiente para resolver los problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas (o planes de estudio) y en los libros de texto, de un nivel educativo determinado. Se trata de un conocimiento que es compartido entre el profesor y los estudiantes. El conocimiento ampliado del contenido es el que debe tener el profesor sobre las nociones matemáticas que se estudian más adelante en el currículo. El conocimiento ampliado del contenido provee al profesor las bases matemáticas necesarias para plantear nuevos retos matemáticos en el aula, vincular el objeto matemático que se está estudiando con otras nociones matemáticas y encaminar a los alumnos al estudio de las nociones matemáticas más avanzadas.

Los sistemas de categorías de conocimientos que deberían tener los profesores de matemáticas para favorecer el aprendizaje son *contenedores* para clasificar los conocimientos según diversos criterios, pero no especifican cuáles son, de hecho, tales conocimientos para los diversos bloques de contenido (aritmética, geometría, etc.). Los libros Edumat-Maestros complementan estos modelos teóricos al desarrollar efectivamente los conocimientos y habilidades matemáticas y didácticas para el diseño de programas y acciones formativas sobre matemáticas (profesor de matemáticas de educación primaria) y sobre didáctica de las matemáticas (formador de profesores). En los siguientes apartados analizamos las características de los libros del proyecto Edumat-Maestros desde la perspectiva del modelo CDM.

Matemáticas para maestros. Conocimiento común y ampliado del contenido

El libro *Matemáticas para maestros* (Godino et al., 2004) es un recurso que incluye los conocimientos que los maestros deberían tener para diseñar procesos de instrucción matemática en los distintos niveles de educación primaria. Define lo que se puede considerar “matemáticas idóneas”, tanto para los escolares de primaria (conocimiento común), como para los maestros encargados de su enseñanza (conocimiento ampliado). Veamos las características de los procesos instruccionales de matemáticas que el texto propone para las diferentes facetas del modelo CDM.

Facetas epistémica y ecológica

El texto incluye los distintos bloques de contenido curricular propios para la educación primaria: Sistemas numéricos; proporcionalidad; geometría; magnitudes; estocástica; razonamiento algebraico.

El bloque de sistemas numéricos es el más extenso y se compone de seis capítulos (Números naturales. Sistemas de numeración; Adición y sustracción; Multiplicación y división; Fracciones y números racionales; Números y expresiones decimales; Números positivos y negativos). La geometría se aborda en tres capítulos (Figuras geométricas; Transformaciones geométricas. Simetría y semejanza; Orientación espacial). Las magnitudes incluyen un capítulo sobre el concepto de magnitud y su medida y otro sobre las magnitudes geométricas. El bloque de estocástica se agrupa en dos capítulos (Estadística; Probabilidad), mientras que la proporcionalidad y el razonamiento algebraico se desarrollan en un capítulo cada uno de ellos. El estudio de cada capítulo incluye dos secciones:

A: Contextualización profesional

En esta sección se incluye una colección de problemas y ejercicios extraídos de libros de educación primaria para los cuales se pide al profesor en formación resolverlos, analizar los conceptos y procedimientos implicados en la solución y formular otros problemas relacionados con los problemas dados. Con estas consignas se comparte con los profesores en formación una visión de las matemáticas centrada en la resolución de problemas y se desarrolla la competencia de su formulación y análisis.

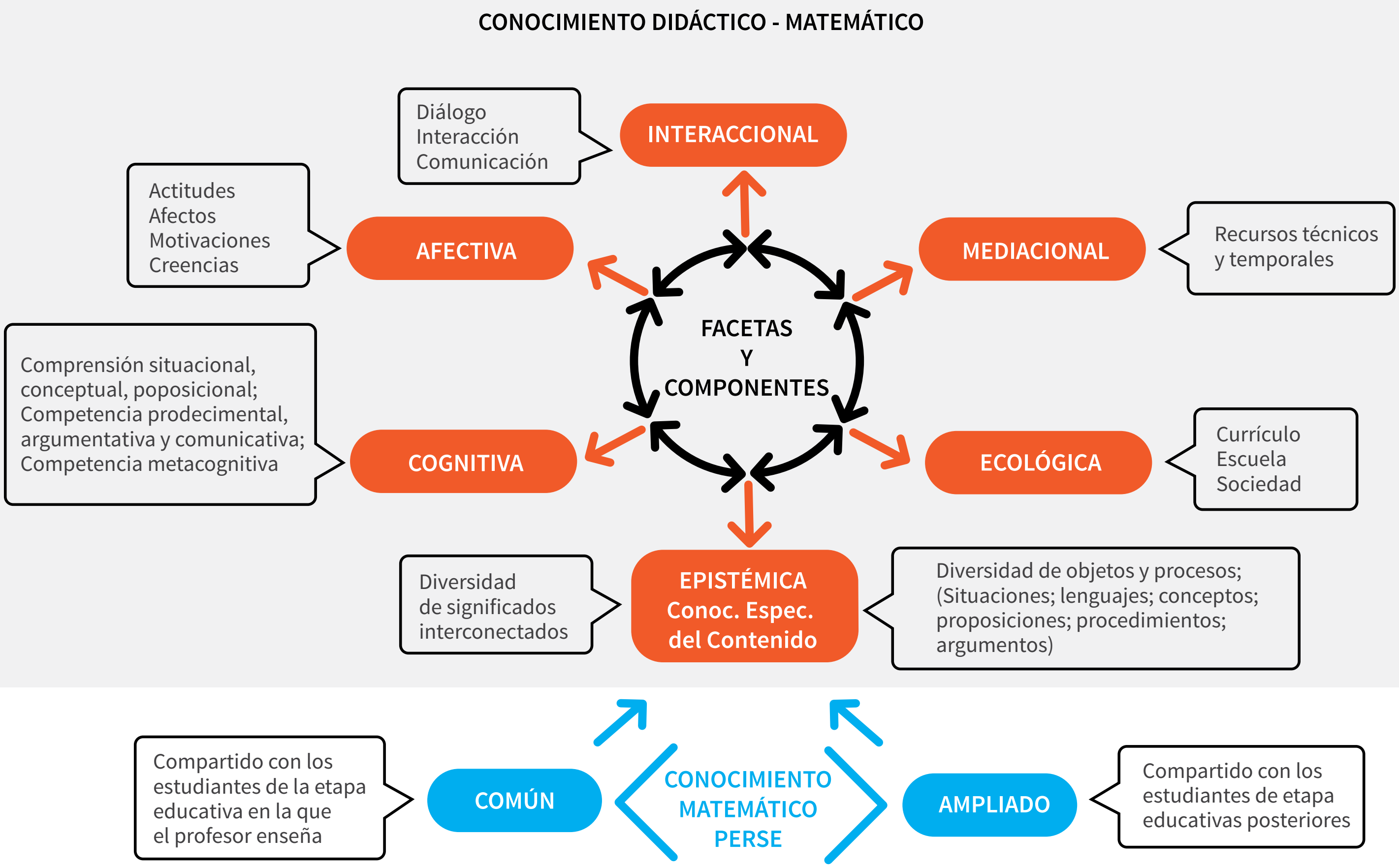


Figura 2. Facetas y componentes del conocimiento del profesor (Godino et al., 2017)

B: Conocimientos matemáticos

Las matemáticas se entienden como actividad de resolución de problemas y también como sistema de objetos relacionados (conocimientos). En consecuencia, en cada capítulo se describe con detalle los conocimientos correspondientes. En cada lección se incluyen ejemplos introductorios que motivan la introducción de los contenidos y un apartado final *Taller de matemáticas* donde se proponen problemas complementarios para su resolución.

Para la trama de objetos conceptuales que caracterizan cada contenido se estudian diversos significados (intuitivos y formales), las definiciones, propiedades y procedimientos con sus respectivas justificaciones y el uso de diversos sistemas de representación. El estudio, por ejemplo, de los números se inicia en educación infantil y se progresa en sucesivos niveles de complejidad en primaria y secundaria. Esto lleva a que los profesores tengan una visión amplia de los diversos significados y de su progresiva generalidad y formalización, lo cual les capacita para diseñar trayectorias de aprendizaje fundamentadas para los diferentes niveles de educación primaria.

Facetas interaccional y mediacional

El modelo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se propone de manera implícita en el libro *Matemáticas para maestros* (esto es, los modos de interacción profesor-estudiante-contenido), tanto para el caso de los estudiantes de primaria como para los profesores se explicita en la monografía *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (Godino, Batanero, & Font, 2003). Sin restar importancia a los enfoques constructivistas en el estudio de las matemáticas, consideramos necesario reconocer explícitamente el papel crucial del profesor en la organización, dirección y promoción de los aprendizajes de los estudiantes. Una instrucción matemática significativa debe atribuir un papel clave a la interacción social, a la cooperación, al discurso del profesor, a la comunicación, además de a la interacción del sujeto con las situaciones-problemas. El maestro en formación debe ser consciente de la complejidad de la tarea de la enseñanza si se desea lograr un aprendizaje matemático significativo. Será necesario diseñar y gestionar una variedad de tipos de situaciones didácticas, implementar una variedad de patrones de interacción y tener en cuenta las normas, con frecuencia implícitas, que regulan y condicionan la enseñanza y los aprendizajes.

En cuanto al uso de recursos o medios para la enseñanza y el aprendizaje (faceta mediacional), el maestro debe tener una actitud propicia al uso de materiales manipulativos de toda índole, incardinados como elementos de las situaciones didácticas, pero al mismo tiempo es necesario que adopte una actitud crítica al uso indiscriminado de tales recursos. Razonamos que el material manipulativo (sea tangible o gráfico-textual) puede ser un puente entre la realidad y los objetos matemáticos, pero es necesario adoptar precauciones para no caer en un empirismo ciego ni en un formalismo estéril.

Facetas cognitiva y afectiva

Los procesos de aprendizaje matemático que se proponen en el libro *Matemáticas para maestros* contemplan partir de los conocimientos previos de los estudiantes y desarrollar los nuevos conocimientos y competencias requeridas para una enseñanza idónea en los distintos niveles de educación primaria. La primera sección de cada capítulo, *A. Contextualización profesional*, tiene el objetivo de evocar conocimientos propios de educación primaria (conocimiento común del contenido) y al mismo tiempo motivar (faceta afectiva) el estudio al relacionarlo con el ejercicio de la profesión. Las matemáticas que se estudian están estrechamente relacionadas con las necesidades profesionales del maestro. Los contenidos incluidos en cada capítulo garantizan el desarrollo de la comprensión de los tipos de situaciones matemáticas propias de educación primaria, así como la comprensión de los conceptos y proposiciones y el desarrollo de la competencia procedimental, argumentativa y comunicativa que ponen en juego en la solución de las situaciones-problemas.

Los contenidos incluidos en cada capítulo garantizan el desarrollo de la comprensión de los tipos de situaciones matemáticas propias de educación primaria, así como la comprensión de los conceptos y proposiciones y el desarrollo de la competencia procedimental, argumentativa y comunicativa que ponen en juego en la solución de las situaciones-problemas.

El proceso de estudio de las matemáticas que se propone a los maestros en formación, apoyado en el uso de los libros *Matemáticas para maestros* y *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, reúne características idóneas (Godino et al., 2023) en las diferentes facetas, de manera que el modelo didáctico que viven en su proceso formativo sea transferible a los niveles de educación primaria que ellos deben diseñar e implementar.

Didáctica de las matemáticas para maestros

El libro *Didáctica de las matemáticas para maestros* (Godino et al., 2004) es un recurso que desarrolla los conocimientos de didáctica de las matemáticas que los formadores de profesores deberían tener en cuenta para diseñar procesos formativos de maestros. Este libro incluye siete bloques de contenido didáctico. En el primer bloque, publicado previamente como la monografía *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para maestros* (Godino, Batanero, & Font, 2003), está formado por cuatro capítulos: Perspectiva educativa de las matemáticas; Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; Currículo matemático para la educación primaria; Recursos para el estudio de las matemáticas. Cada uno de estos capítulos incluye tres secciones: Contextualización profesional; Conocimientos didácticos; Seminario didáctico. Incluye también un listado de referencias bibliográficas complementarias.

En esta monografía ofrecemos una visión general de la educación matemática. Tratamos de crear un espacio de reflexión y estudio sobre las matemáticas, en cuanto objeto de enseñanza y aprendizaje, y sobre los instrumentos conceptuales y metodológicos de índole general que la didáctica de las matemáticas está generando como campo de investigación. Los seis principios del NCTM (2000) — equidad, currículo, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnología — describen cuestiones cruciales que, aunque no sean específicas de las matemáticas escolares, están profundamente interconectadas con los programas de matemáticas. Deben ser tenidos en cuenta en el desarrollo de propuestas curriculares, la selección de materiales, la planificación de unidades didácticas, el diseño de evaluaciones, las decisiones instruccionales en las clases, y el establecimiento de programas de apoyo para el desarrollo profesional de los profesores

Cada capítulo de la monografía ha sido estructurado en tres secciones. En la primera sección, que denominamos *Contextualización*, proponemos una situación inicial de reflexión y discusión colectiva sobre un aspecto del tema. En la segunda, *Desarrollo de conocimientos*, presentamos las principales posiciones e informaciones, así como una colección de actividades o tareas intercaladas en el texto que pueden servir como situaciones introductorias a los distintos apartados, o bien como complemento y evaluación del estudio. La tercera sección, *Seminario didáctico*, incluye una colección de "problemas de didáctica de las matemáticas" que amplían la reflexión y el análisis de los conocimientos propuestos en cada tema.

Didáctica de los bloques de contenido matemático. Conocimiento especializado del contenido

El libro *Didáctica de las matemáticas para maestros* (Godino et al., 2004) incluye, además de la monografía *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* otros seis bloques de contenido didáctico que refieren a conocimientos didáctico-matemáticos específicos de los bloques de contenido matemático: sistemas numéricos; proporcionalidad; geometría; magnitudes; estocástica; razonamiento algebraico. En cada capítulo se incluye los siguientes apartados:

> Orientaciones curriculares; Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje; Conflictos en el aprendizaje; Instrumentos de valuación; Situaciones y recursos; Taller de didáctica (Análisis de textos escolares, Diseño de unidades didáctica; Análisis de respuestas a tareas de evaluación).

En estos apartados se contempla la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático, que incluye aspectos de la cognición matemática de los contenidos específicos (desarrollo cognitivo, conflictos de aprendizaje, instrumentos de evaluación), ecológica (orientaciones curriculares), mediacional (situaciones y recursos). El *Taller de didáctica* corresponde a aspectos de la faceta mediacional e interaccional del conocimiento del formador de profesores de matemáticas al indicar cómo contextualizar los conocimientos didáctico-matemáticos.

Conclusiones

Desde la investigación sobre formación del profesor de matemáticas y de los formadores de profesores se vienen proponiendo diversos sistemas de categorías de conocimientos y competencias del profesor, así como de las características de los programas efectivos de desarrollo profesional docente (NCTM, 2014; AMTE (2017). En este trabajo hemos realizado una mirada retrospectiva a los libros del proyecto Edumat-Maestros mostrando su coherencia con el modelo CDM (Pino-Fan y Godino, 2015), su difusión a nivel internacional, así como la inclusión sistemática de los conocimientos matemáticos y didácticos requeridos para la formación del profesor de educación primaria. Consideramos que estos libros vienen siendo recursos valiosos para los profesores de matemáticas y los formadores de profesores al tener en cuenta las diferentes facetas implicadas en los procesos educativos-instruccionales sobre matemáticas y didáctica de las matemáticas.

Queda pendiente de abordar un nuevo desarrollo de este proyecto en el que se amplíe la monografía Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con la presentación de las herramientas de análisis didáctico proporcionadas por el marco teórico del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2020). Así mismo, en las restantes monografías se pueden incluir talleres específicos para que los profesores se apropien de dichas herramientas y puedan usarlas para la reflexión sobre la práctica docente.

Referencias bibliográficas

Association of Mathematics Teacher Educators (AMTE) (2017). *Standards for preparing teachers of mathematics.* Association of Mathematics Teacher Educators.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Batanero, C., & Godino, J. D. (2003). Estocástica y su didáctica para maestros. Los autores. https://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., et al. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253.

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Los autores. https://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf

Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Los autores. https://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(6), em2270.

Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Roa, R., & Ruiz, F. (2004a). *Matemáticas para maestros*. https://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf

Godino, J. D. Batanero, C., Cid, E., Font, V., Roa, R., & Ruiz, F. (2004b). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Los autores. https://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Los autores. https://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3-15.

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2003). Medida y su didáctica para maestros. Los autores. https://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Godino, J. D., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Los autores. https://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., & Ruiz, F. (2003). Geometría y su didáctica para maestros. Los autores. https://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

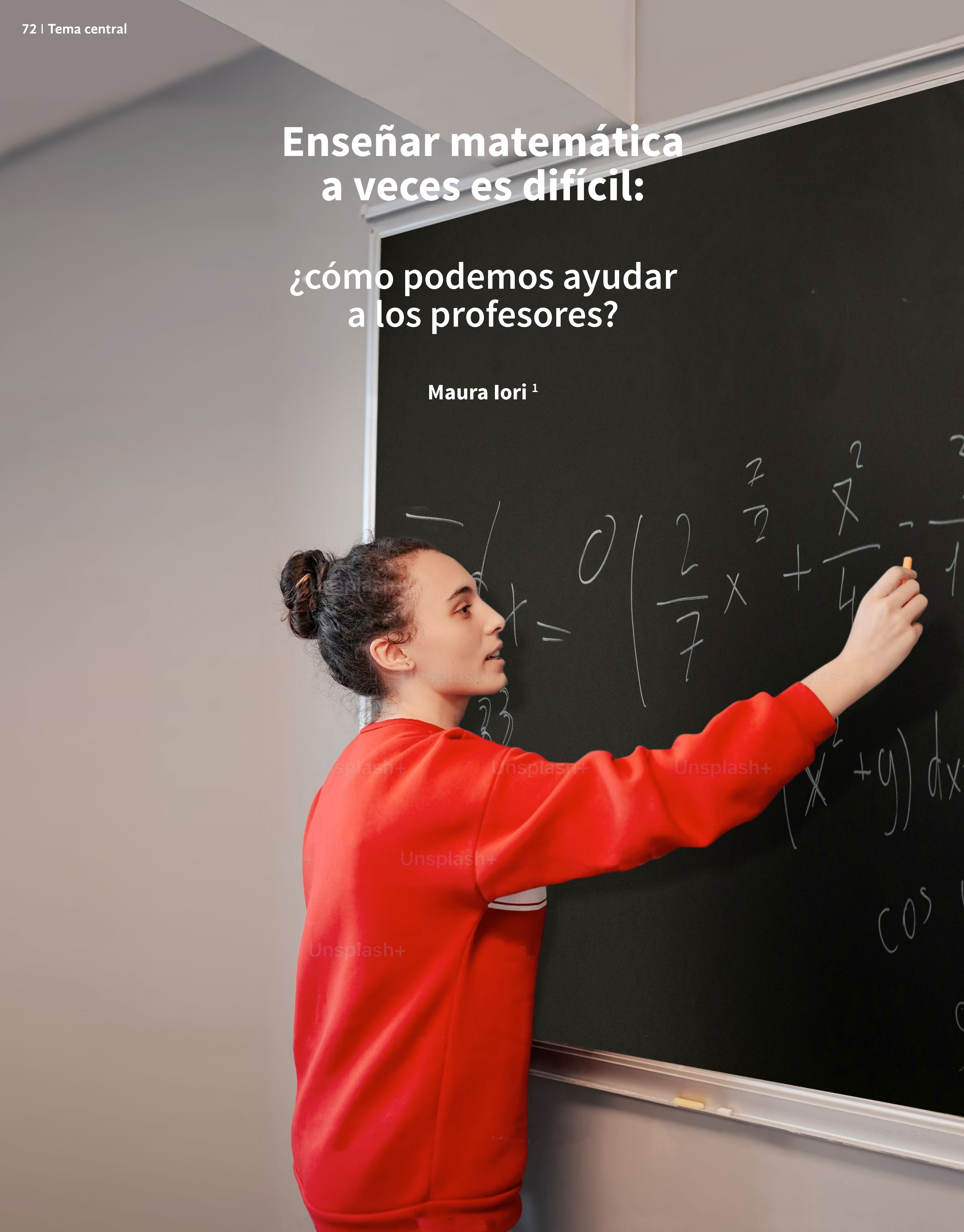
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Notas

1 Catedrático jubilado de Didáctica de la Matemática. Miembro del Grupo de Investigación "Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística" de la Universidad de Granada.



Enseñar matemática a veces es difícil:

¿cómo podemos ayudar a los profesores?

Maura Iori [1]

Resumen

La enseñanza-aprendizaje de la matemática presenta desafíos tanto para profesores como para estudiantes, especialmente en el manejo de los diferentes registros de representación semiótica. Este artículo explora estos desafíos y propone estrategias prácticas para los docentes, como la introducción gradual de registros semióticos, la conciencia metasemiótica y el uso reflexivo de las tecnologías digitales, con el fin de fomentar una mejor comprensión de los objetos/conceptos matemáticos, promoviendo el desarrollo de conocimientos semióticos esenciales. habilidades por parte de los estudiantes.

Palabras clave: enseñanza de la matemática, gestión semiótica, registros de representación semiótica, obstáculos en el aprendizaje de la matemática, competencias semióticas.

La enseñanza de la matemática presenta desafíos importantes para los docentes, del mismo modo que aprender matemática puede resultar difícil para muchos estudiantes. Son numerosos los obstáculos que se interponen entre la enseñanza y el aprendizaje (Brousseau, 1976-1983). Uno de los principales radica en la complejidad del manejo semiótico de objetos/conceptos matemáticos.

Muchos estudiantes, especialmente los de secundaria, encuentran dificultad en matemática no tanto (o no sólo) por una falta de comprensión de los propios conceptos matemáticos, sino por la falta de dominio de la semiótica matemática que los caracteriza y, por tanto, debido al uso inadecuado de los sistemas de símbolos necesarios en las actividades matemáticas.

A menudo, ante un ejercicio de aritmética o de álgebra aparentemente sencillo, o ante la petición de dibujar una figura geométrica o un gráfico en el plano cartesiano, muchos estudiantes se quedan estancados, no saben cómo proceder, aunque comprendan los aspectos conceptuales involucrados. De otra parte, en ocasiones la representación de un objeto geométrico o de una relación aritmética o algebraica juega un papel esencial en la resolución de un problema, de hecho, en algunas situaciones constituye *la* resolución del problema mismo.

Y es precisamente en situaciones como éstas donde se hace evidente el desafío que enfrentan muchos estudiantes en el manejo de los diferentes sistemas semióticos utilizados en matemática, conocidos como registros de representación semiótica (Duval, 1993, 2017). Esta dificultad de gestión dificulta el proceso de aprendizaje y requiere una atención específica de parte del docente.

En línea con los tres tipos de obstáculos destacados por Guy Brousseau (Brousseau, 1976-1983), la dificultad de la gestión semiótica puede ser de la siguiente naturaleza:

- ontogenética (vinculada al estudiante): dificultades relacionadas con el desarrollo cognitivo individual del estudiante en la comprensión, escritura o uso de signos, símbolos o representaciones semióticas de objetos matemáticos;
- didáctica (vinculada con las elecciones didácticas del profesor): elecciones semióticas inadecuadas, inadecuadas, poco significativas desde el punto de vista matemático o no inclusivas pueden obstaculizar la comprensión y el desarrollo de las habilidades semióticas por parte del estudiante;
- epistemológica (vinculada con la naturaleza del objeto/concepto matemático considerado, con su historia dentro de las matemáticas): dificultades que se derivan de la complejidad intrínseca de los conceptos matemáticos y sus representaciones, ya que el acceso a los objetos matemáticos es sólo semiótico, a través de representaciones semióticas; representaciones que no son universales e inmutables, sino resultado de una evolución histórica y cultural.

Por lo tanto, la enseñanza de la matemática requiere la capacidad del profesor para representar conceptos/objetos matemáticos en formas que sean comprensibles para los estudiantes, utilizando signos apropiados (palabras, símbolos, ecuaciones, funciones, gráficos, diagramas, configuraciones geométricas, etc.) que puedan asumir, para los estudiantes, el papel de representaciones específicas de objetos/conceptos matemáticos en diferentes registros semióticos.

La multiplicidad de representaciones de que dispone el docente, de una parte, ofrece la posibilidad de modular el proceso de enseñanza-aprendizaje en función no sólo del tipo de contenidos matemáticos a enseñar, sino también (y sobre todo) de las necesidades, características cognitivas o los estilos de aprendizaje de los estudiantes, de otra parte, requiere un conocimiento profundo de las potencialidades y límites de las diferentes representaciones, para superar los obstáculos que muchas veces se interponen entre la enseñanza del profesor y el aprendizaje del estudiante.

A continuación, presentamos algunos desafíos relacionados con el uso de diferentes registros de representación semiótica en la enseñanza de las matemáticas, junto con sugerencias para los profesores sobre cómo abordarlos.

Desafíos relacionados con el uso de diferentes registros semióticos

— **Dificultad de tratamiento o conversión:** La sustitución de representaciones semióticas dentro de un mismo registro, sobre la base de las operaciones específicas de sustitución que el registro permite realizar (*tratamiento*) o la sustitución de una representación de un registro por otra de otro. registro, en función de las posibilidades específicas de sustitución que el cambio de registro permite realizar (*conversión*) no son triviales, requieren habilidades cognitivas específicas que se deben desarrollar y consolidar, así como la capacidad de no confundir representaciones semióticas con objetos/conceptos que las representaciones pueden evocar. En otras palabras, los estudiantes pueden encontrar dificultades para reconocer o interpretar las relaciones entre las diferentes representaciones de un mismo concepto/objeto matemático tanto dentro del mismo registro (D'Amore, 2006, 2007) como después de cambiar de registro (Duval, 1993, 2017).

— **Elevada carga cognitiva:** La necesidad de gestionar simultáneamente un gran número de registros semióticos conlleva una carga cognitiva considerable, que podría confundir a los estudiantes y hacer más difícil la comprensión de los aspectos conceptuales.

— **Falta de familiaridad con algunos registros por parte de los estudiantes:** El desconocimiento de registros semióticos específicos, como el registro de escrituras simbólicas, el registro de configuraciones geométricas o el registro gráfico, puede obstaculizar la comprensión de los estudiantes.

— **Excesiva atención a los registros y no a los conceptos:** Prestar demasiada atención a los diferentes registros de representación o no establecer conexiones significativas entre estos puede hacernos perder de vista los propios conceptos, dificultando su comprensión.

— **Dificultad para evaluar el dominio de los registros semióticos:** La evaluación de la comprensión de los estudiantes en el uso de registros semióticos puede ser una tarea compleja y requerir la adopción de diferentes metodologías de evaluación, teniendo en cuenta las diferentes capacidades cognitivas implicadas.

Sugerencias para los profesores

— **Introducción gradual de los registros semióticos:** Es fundamental introducir progresivamente los diferentes registros semióticos, partiendo de los más familiares para los estudiantes y avanzando hacia los menos familiares o nunca utilizados, permitiendo que los estudiantes se vayan familiarizando con cada uno de estos de forma gradual.

— **Conciencia metasemiótica:** Es importante ayudar a los estudiantes a comprender también la naturaleza y funciones de los diferentes registros semióticos, especialmente en el nivel de secundaria, para que el aprendizaje de la matemática sea más efectivo y consciente y estimule el desarrollo de competencias semióticas.

— **Conexiones explícitas entre registros:** Resaltar las relaciones entre los diferentes registros, mostrando cómo se integran entre sí, favorece una comprensión más amplia y articulada.

— **Tratamientos y conversiones:** Proponer diferentes actividades, incluso en forma de juego, que requieran representar un objeto/concepto matemático de diferentes maneras tanto dentro de un mismo registro como en otros registros, para promover un aprendizaje más profundo y significativo.

— **Potenciar diferentes habilidades y estilos de aprendizaje:** Reconocer que los estudiantes pueden tener preferencias específicas por ciertos registros, ofreciéndoles la oportunidad de elegir el registro que mejor se adapte a su estilo de aprendizaje; sin embargo, es igualmente importante alentar a los estudiantes a utilizar diferentes registros, incluso aquellos que puedan parecer más difíciles de manejar. También es esencial subrayar que no existe un mejor registro absoluto; la elección de qué registro utilizar depende de su eficacia en una situación específica determinada o para resolver el problema en cuestión.

— **Reflexión sobre el uso de registros semióticos:** Dedicar tiempo a discutir con los estudiantes el potencial y las limitaciones de cada registro para desarrollar una mayor conciencia y dominio semiótico. En otras palabras, el uso de diferentes registros no debe ser una acción en sí misma, sino apuntar a fomentar una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

— **Equilibrio entre la libertad de expresión/representación de los estudiantes y la necesidad de una escritura compartida en matemática:** Es importante encontrar un equilibrio entre la libertad de expresión/representación y la necesidad de una escritura compartida en matemática, un equilibrio que permita a los estudiantes, desde la escuela primaria, expresar su creatividad y originalidad, sin comprometer el proceso de aprendizaje. De hecho, una libertad excesiva en la representación de objetos/conceptos matemáticos podría tener efectos negativos en el aprendizaje, influyendo no sólo en la comprensión de los conceptos, sino también en la actitud de los estudiantes hacia la matemática y en la confianza en sus propias capacidades. Por lo tanto, es importante brindar un apoyo adecuado a los estudiantes desde la escuela primaria, con el fin de desarrollar habilidades compartidas de representación matemática y el desarrollo de competencias matemáticas.

— **Tecnologías digitales y gestión de diferentes registros semióticos:** Las tecnologías digitales pueden representar una herramienta valiosa para los profesores en la gestión de diferentes registros semióticos. A través de herramientas interactivas y simulaciones, estas tecnologías facilitan la visualización, manipulación y representación de objetos/conceptos matemáticos en diferentes registros. Sin embargo, es fundamental que los profesores los utilicen de forma consciente y crítica. Deben ser capaces de evaluar la eficacia de los recursos digitales e integrarlos de manera significativa en el proceso de enseñanza de la matemática.

— **Formación docente específica:** Es fundamental que los docentes realicen un proceso de formación continua para actualizar sus conocimientos y habilidades sobre el uso de los diferentes registros semióticos en la enseñanza de las matemáticas. Esto les permite mantenerse informados sobre los resultados de investigaciones recientes en educación matemática e integrar efectivamente los diferentes registros semióticos en su práctica docente, para fomentar un aprendizaje más efectivo y significativo por parte de los estudiantes.

En conclusión, el uso consciente y diversificado de registros semióticos apropiados, adaptados al nivel académico de los estudiantes, es fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Los desafíos asociados a este uso pueden abordarse mediante la formación específica de docentes, la adopción de estrategias de enseñanza adecuadas y el uso crítico y reflexivo de las nuevas tecnologías digitales. Este enfoque no sólo fomenta una comprensión más profunda de los objetos/conceptos matemáticos, sino también el desarrollo de habilidades semióticas fundamentales por parte de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1976-1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In W. Wanhamme & J. Wanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Actes de la XXVIIIème rencontre CIEAEM, Louvain la Neuve, 5-12 août 1976*. IREM de Louvain la Neuve. [Publicado también en: *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 1983, *4*(2), 165–198].

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 557-583.

D'Amore, B. (2007). Mathematical objects and sense: How semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23-45.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing AG.

Notas

1 Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna. PhD in Mathematics Education.

Llegar a ser profesor de matemáticas:

los casos y los debates electrónicos

Aprender a enseñar matemáticas:

El desafío de las nuevas tecnologías de la comunicación y la información

Salvador Llinares[1]

Resumen

Se proponen reflexiones en torno a la formación de profesores de matemáticas en relación con el conocimiento y el aprendizaje, aprovechando diversos componentes relacionados con el concepto de "actividad".

Palabras clave: actividades auténticas, contextos de aprendizaje, herramienta, práctica de la enseñanza de las matemáticas, tareas profesionales, herramientas cognitivas.

Llegar a ser profesor de matemáticas y las nuevas perspectivas sobre el conocimiento y el aprendizaje

"Actividades auténticas" y contextos de aprendizaje

Llegar a ser profesor de matemáticas en la enseñanza primaria es un proceso que implica: generar formas de conocer / desarrollar maneras de actuar / llegar a formar parte de una comunidad de práctica de enseñar matemáticas en la enseñanza primaria.

Las nuevas perspectivas sobre el conocimiento y el aprendizaje vinculadas a las nociones de "cognición situada" y "comunidades de Práctica" (Lave, & Wenger, 1991) han introducido nuevas ideas en la manera de mirar el proceso de aprender a enseñar matemáticas y en cómo los estudiantes para profesor aprenden nuevas formas de enseñar (Putnam & Borko, 2000). Las perspectivas situadas sobre el aprendizaje defienden el que los contextos físicos y sociales en los que la actividad tiene lugar forman parte integral de la propia actividad y de lo que es aprendido. De esta manera, cómo una persona aprende y la situación en la que aprende llegan a ser una parte fundamental de lo que es aprendido.

La naturaleza situada de la cognición subraya la importancia de las características de: las "tareas/actividades" que se presentan al aprendiz / los "contextos" (por ejemplo, el sistema de interacciones que se establecen).

Las tareas, que el formador de profesores presenta a los estudiantes para profesor, se denominan "actividades auténticas" cuando son similares a las que realizan los profesores en la nueva cultura escolar que se quiere desarrollar. Este hecho conlleva el tener que identificar las tareas que definen el "ser un profesor de matemáticas en la enseñanza primaria" en la nueva cultura escolar determinada por los principios de reforma de la enseñanza de las matemáticas.

El diseño de "actividades auténticas" en los cursos de formación de profesores tiene como objetivo el que los estudiantes para profesor aprendan a pensar y actuar como profesores. El criterio para determinar si una tarea / actividad puede llegar a ser "auténtica" es considerar la clase de pensamiento y destrezas de resolución de problemas que puede llegar a generar en los estudiantes para profesor. Lo que se pretende es que los estudiantes para profesor se apropien y usen ideas y conceptos teóricos entendidos como "instrumentos cognitivos" para entender y manejar las situaciones de enseñanza de las matemáticas.

Las perspectivas situadas sobre el aprendizaje y el conocimiento también subrayan el papel desempeñado por las características de los contextos de aprendizaje determinando lo que es aprendido y cómo es aprendido. Desde este punto de vista lo que tomamos como conocimiento y la forma en que pensamos y expresamos las ideas son productos de las interacciones de grupos de personas a lo largo del tiempo. La participación en "comunidades de discurso" proporcionan herramientas cognitivas – ideas, teorías y conceptos – que los individuos se apropian como suyas a través de sus esfuerzos para dotar de sentido a las experiencias (Putnam, & Borko, 2000). Esta perspectiva subraya la dimensión social del aprendizaje y, en particular, se entiende el aprender a enseñar matemáticas como llegar a conocer cómo participar en el discurso y la práctica de la comunidad de profesores de matemáticas de enseñanza primaria. Un objetivo para el formador de profesores derivado de esta perspectiva es «enculturar a los estudiantes para profesores de matemáticas en comunidades de discurso, desarrollando la competencia en el uso de los conceptos y formas de razonar y argumentar que caracterizan la comunidad de profesores de matemáticas de primaria» (Putnam, & Borko, 2000). Desde estas reflexiones iniciales vale la pena subrayar dos ideas:

1) la forma de participar en "comunidades de práctica" de los estudiantes para profesor permite que puedan llegar a apropiarse de conceptos e ideas teóricas entendidas como "instrumentos cognitivos" cuyo significado se crea y se usa cuando los estudiantes para profesor intentan

dotar de significado a las situaciones de enseñanza de las matemáticas, y

2) el uso de estos instrumentos en las interacciones con sus compañeros durante el análisis de las situaciones de enseñanza de las matemáticas es un indicador de su integración en la comunidad de profesores de matemáticas de la enseñanza primaria.

Las perspectivas situadas del aprendizaje plantean cuestiones relativas al diseño de situaciones de aprendizaje, en particular, en qué contextos debemos situar el conocimiento necesario para enseñar. Se pretende tener en cuenta que diferentes contextos de aprendizaje generarán diferentes maneras de conocer.

Los estudiantes para profesor pueden expresar la forma en que dotan de significado a los diferentes aspectos de la situación y llegar a negociar los diferentes significados. Diferentes dimensiones de la situación de aprendizaje definida por el caso que determinan lo que puede llegar a ser aprendido son: La interrelación entre las creencias, conocimiento y las formas de participar.

Noción de “instrumento” y la práctica de enseñar matemáticas

Los recientes desarrollos de las teorías sobre el aprendizaje inciden en la relación esencial entre el conocimiento y los contextos de uso. Desde esta relación se ve el aprendizaje como la participación en entornos interactivos con un grado creciente de conocimiento y uso de los *instrumentos* característicos de la práctica. Esta suposición se apoya en la idea de que las personas pensamos y actuamos ayudadas por instrumentos. El significado del término *instrumento* como «*cualquier medio, cosa o persona, de que alguien se sirve para un fin*» (Diccionario de uso del Español de María Moliner), *«Lo que sirve de medio para hacer una cosa o conseguir un fin./ Aquello de lo que nos servimos para hacer una cosa*» (Diccionario Enciclopédico Salvat) conlleva la idea de un objeto diseñado y empleado para ampliar el poder de las acciones del individuo. Las perspectivas situadas de la cognición amplían el significado dado al término instrumento como un objeto físico para incluir también conceptos, formas de razonar, formas de generar un discurso, entre otras, que condicionan y permiten las interacciones dentro de las comunidades. Así en el dominio semántico del término “instrumento” podemos considerar, para el caso particular de la práctica de enseñar matemáticas en la Educación Primaria,

instrumentos técnicos necesarios para realizar la “práctica”, como por ejemplo materiales didácticos, software didáctico, matrices para la evaluación de los procesos de resolución de problemas de los alumnos de Primaria y técnicas para gestionar los debates y puestas en común, e

instrumentos conceptuales, como por ejemplo los diferentes tipos de problemas aritméticos elementales de estructura aditiva, las diferentes estrategias de resolución de los PAE’s aditivos empleadas por los niños, o diferentes niveles de dificultad de dichos problemas. Es decir, conceptos y construcciones teóricas que se han generado desde las investigaciones en Didáctica de la Matemática que permiten comprender y tratar la realidad (situaciones en las que se enseñan y aprenden matemáticas).

En este contexto la “práctica” se entiende como:

realizar unas tareas (planificar, diagnosticar, gestionar interacciones, ...) / hacer uso de unos instrumentos / justificar su uso.

Considerando la enseñanza de las matemáticas como una práctica que tiene que ser comprendida y aprendida, podemos identificar algunas tareas que la articula: dotar de significado a las producciones de los alumnos -diagnosticar / planificar / evaluar / gestionar debates / etc.

Así, la formación de maestros desde la Didáctica de la Matemática se puede entender como un proceso de introducción de los estudiantes para profesores en la comunidad constituida por la práctica de enseñar matemáticas en la enseñanza Primaria en la que: se comparten tareas y se generan y usan determinados instrumentos.

Es decir, llegar a ser un profesor de matemáticas en la enseñanza Primaria, significa: llegar a comprender la enseñanza de las matemáticas / aprender a realizar las tareas / usar y justificar los instrumentos que la articulan en un contexto institucional como es la Educación Primaria.

La enseñanza basada en los casos y las nuevas tecnologías de la comunicación

La enseñanza basada en los casos en los programas de formación de profesores (Llinares, 1993; Merseth, 1996) permite crear entornos de aprendizaje reflejando características de las “actividades auténticas” para los estudiantes para profesores de matemáticas de enseñanza primaria. Los casos pueden ser descripciones de situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que ejemplifican diferentes tareas vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas en la enseñanza primaria. Los casos proporcionan los medios para que los estudiantes para profesores puedan analizar situaciones de enseñanza de las matemáticas explorando la complejidad de situaciones reales sin la presión de la propia realidad. Además, son un medio a través del cual los estudiantes para profesor pueden apropiarse de conceptos e ideas teóricas entendidas como “instrumentos cognitivos” en el proceso de dotar de significado a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Llinares, 1999).

Una de las características del uso de casos en los programas de formación de profesores es la posibilidad de analizar las situaciones descritas desde diferentes perspectivas teóricas. Los estudiantes para profesor pueden expresar la forma en que dotan de significado a los diferentes aspectos de la situación y llegar a negociar los diferentes significados. Diferentes dimensiones de la situación de aprendizaje definida por el caso que determinan lo que puede llegar a ser aprendido son: La interrelación entre las creencias, conocimiento y las formas de participar.

En este contexto, las nuevas tecnologías de la comunicación y la información permiten abrir nuevas referencias que pueden ayudar a maximizar y condicionar lo que puede ser aprendido en estas situaciones. En este sentido, las tecnologías de la comunicación introducen nuevos medios a tener en cuenta en el diseño de los entornos de aprendizaje. Un ejemplo es el uso de *debates electrónicos*. Los debates electrónicos permiten introducir la noción de reflexión asincrónica, permitiendo ampliar el proceso de análisis de la situación y el proceso de interacción entre los estudiantes para profesor. Características del uso del debate electrónico (conversations over e-mail, listserve forums) son:

se desarrolla a lo largo de un intervalo de tiempo de varias semanas durante el cual los participantes pueden leer lo que ha sido expresado con anterioridad y pueden considerarlo cuando realizan su contribución,

los estudiantes para profesor pueden reflexionar sobre sus propias evoluciones ya que al quedarse registradas todas las intervenciones pueden leer lo que ellos mismos habían aportado al debate en un tiempo anterior y determinar en qué medida han modificado sus propias interpretaciones de la situación o el uso de un determinado concepto o idea teórica.

En estos momentos, la integración del uso de los casos y de los nuevos recursos procedentes de las tecnologías de la información y la comunicación es un reto para los formadores de profesores. A continuación, utilizando un ejemplo de uso de casos en contextos virtuales describiré cómo es posible realizar dicha integración.

La naturaleza situada de la cognición subraya la importancia de las características de: las “tareas/actividades” que se presentan al aprendiz / los “contextos” (por ejemplo, el sistema de interacciones que se establecen).

Los casos como actividades auténticas: tareas profesionales e instrumentos cognitivos

Tareas profesionales de la actividad de enseñar matemáticas

Para que los casos puedan ser considerados “actividades auténticas” deben permitir desarrollar en los estudiantes para profesor pensamiento y destrezas de resolución de problemas características de los profesores que reflejan en su enseñanza los principios de la reforma de la enseñanza de las matemáticas. Esto implica tener que considerar dos dimensiones en el diseño de los casos: tareas profesionales vinculadas a la labor de enseñar matemáticas, nociones e ideas teóricas como instrumentos cognitivos para dotar de significado (interpretar) la situación.

En relación a la primera dimensión a considerar en el diseño de los casos, algunas de las tareas del profesor de matemáticas pueden ser: definir objetivos / evaluar / diagnosticar / usar la “historia” del aprendizaje previo de sus alumnos (itinerario curricular) / pensar en formas de obtener información para tomar decisiones sobre cómo seguir en la enseñanza (por ejemplo, diseñando tareas alternativas para sus alumnos) / gestionar el intercambio de preguntas –respuestas entre profesor y alumno / enfatizar unos aspectos específicos del contenido matemático frente a otros.

Estas diferentes tareas profesionales del profesor suelen estar integradas en las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por consiguiente, los casos diseñados deben ayudar al análisis de situaciones en las que algunas de estas diferentes tareas profesionales se presenten. Un ejemplo es “El caso de Miguel”, una de las actividades virtuales utilizadas en los debates electrónicos en el programa de formación de Maestros en la Universidad de Alicante durante el curso 2001/2002.

El caso con forma de texto, es una descripción de una situación de enseñanza aprendizaje de las matemáticas descrita por una profesora de 2º de Primaria (alumnos de 7-8 años). Este caso también tiene un formato en video que permite ver las interacciones entre el alumno y la profesora ante el problema matemático. En el contexto virtual los estudiantes para profesor tenían acceso al formato texto y durante las clases presenciales pudieron ver el video.

El “caso de Miguel” es una descripción de una situación en la que es posible identificar algunas de las tareas profesionales del profesor, y por tanto puede llegar a convertirse en un medio para analizar y reflexionar sobre ellas.

Referencias bibliográficas

Lave, J. & Wenger, E. (1991) *Sistuated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Llinares, S (1993) El estudio de casos como una aproximación metodológica al proceso de aprender a enseñar matemáticas. En: L. Blanco & L. Casas (Eds.), *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Badajoz, Sociedad Extremeña de Educación Matemática- Federación Española de Sociedades de profesores de Matemáticas.

Llinares, S. (1999) Preservice elementary teachers and learning to teach mathematics. Relationships among context, task and cognitive activity. (pp. 107-119). En: N. Ellerton (Eds.), *Mathematics Teacher Development: International perspectives.* West Perth, Australia: Meridian Press.

Merseth, K.K. (1996) Cases and case methods in teacher education. En: J. Sikula (Ed.). *Handbook of research on teacher education* (2nd ed.; pp.722-744). New York: Macmillan

Putnam, R. & Borko, H, (2000) What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher*, january-february, 4-15.

Trabajo desarrollado dentro del grupo TICEM-UA: Tecnologías de la Información y Comunicación aplicadas a la Educación Matemática – Universidad de Alicante.

Nota

Esta publicación es la traducción al español de la parte I del artículo publicado en italiano:
Llinares, S. (2002). Arrivare ad essere insegnante di matematica: “casi” e dibattiti elettronici. *La matematica e la sua didattica, 16*(3), 258-277.

1 Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, España.

Universidad de La Sabana

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Pregrados

- **Licenciatura en Educación Infantil** - Chía
  SNIES 105721 | Reg. Calif. Res. N.° 1582 del 17/07/2020, vigencia 7 años | 10 semestres
- **Licenciatura en Ciencias Naturales** - Chía
  SNIES 106100 | Reg. Calif. Res. N.° 00566 del 23/01/2017, vigencia 7 años | 10 semestres

Doctorados

- **Educación** - Chía
  SNIES 104738 | Reg. Calif. Res. N.° 10568 del 14/07/2015, vigencia 7 años | 8 semestres
- **Innovación Educativa con uso de TIC** - Chía
  SNIES 109126 | Reg. Calif. Res. N.° 014784 del 17/12/2019, vigencia 7 años | 3 años

Maestrías

- **Proyectos Educativos mediados por TIC** *virtual*
  SNIES 102490 | Reg. Calif. Res. N.° 015908 del 18/12/2019, vigencia 7 años | 4 semestres
- **Desarrollo Infantil** - Chía
  SNIES 106159 | Reg. Calif. Res. N.° 3110 el 03/03/2017, vigencia 7 años | 4 semestres
  Aprobación modalidad Investigación Reg. Calif. Res. N.° 7886 el 24/05/2018
- **Educación** - Chía
  SNIES 51841 | Reg. Calif. Res. N.° 13835 del 15/08/2018, vigencia 7 años | 4 semestres
- **Didáctica del Inglés para el Aprendizaje Autodirigido** *virtual*
  SNIES 90691 | Reg. Calif. Res. N.° 12336 del 23/06/2017, vigencia 7 años | 4 semestres
- **Innovación Educativa mediada por TIC** - Chía
  (presencial 20%) (virtual 80%)
  SNIES 106447 | Reg. Calif. Res. N.° 18199 del 13/09/2017, vigencia 7 años | 4 semestres
- **Pedagogía** - Chía
  SNIES 53938 | Reg. Calif. Res. N.° 021936 del 24/11/2020, vigencia 7 años | 4 semestres
- **Dirección y Gestión de Instituciones Educativas** - Chía
  SNIES 53654 | Reg. Calif. Res. N.° 017445 del 17/09/2020, vigencia 7 años | 4 semestres

Especializaciones

- **Gerencia Educativa** - Chía
  SNIES 1242 | Reg. Calif. Res. N.° 8692 del 03/05/2017, vigencia 7 años | 2 semestres
- **Pedagogía e Investigación en el Aula** *virtual*
  SNIES 53009 | Reg. Calif. Res. N.° 002649 de 21/02/2020, vigencia 7 años | 2 semestres

Contacto
posgrados.educacion@unisabana.edu.co
Tel.: 3106790072

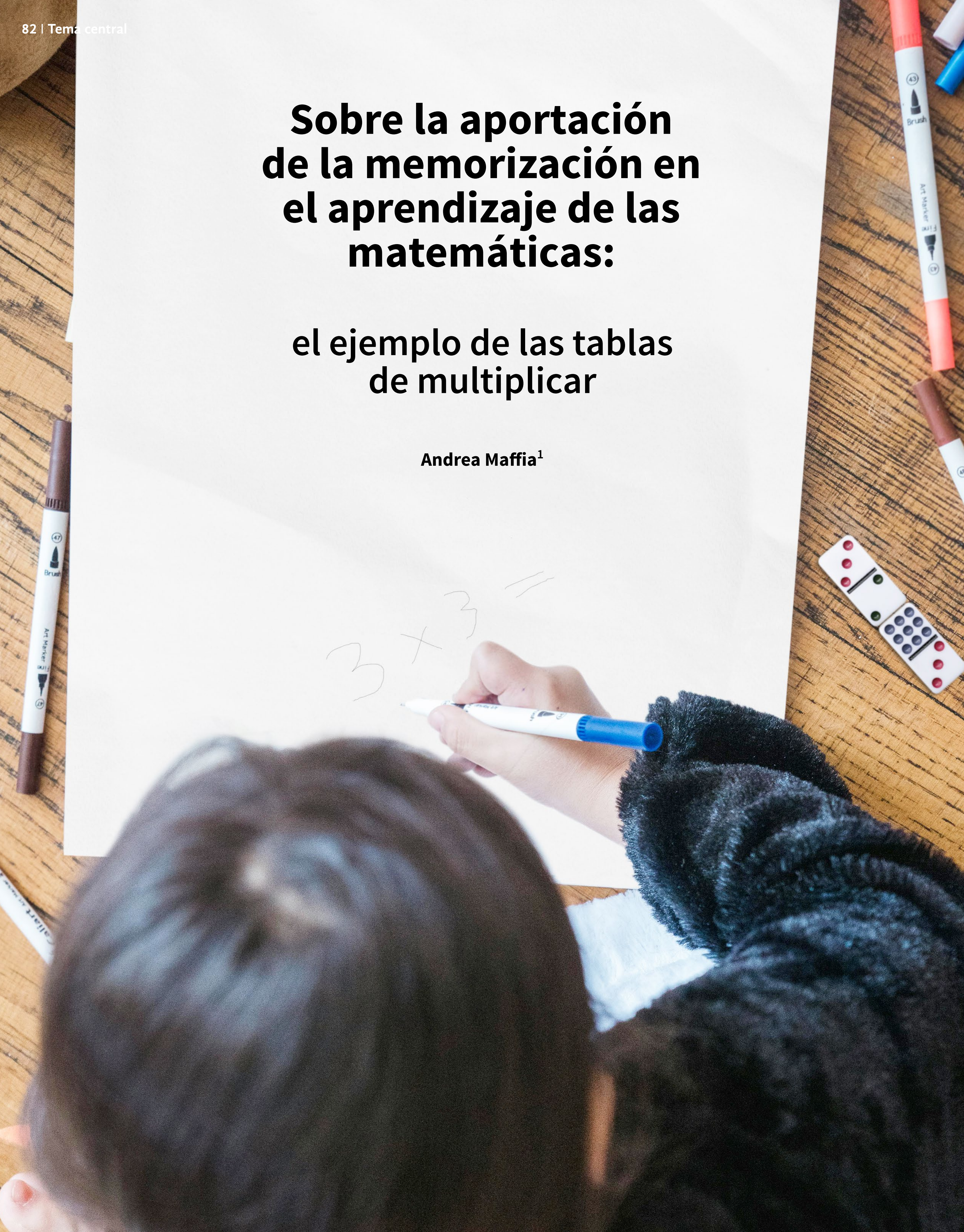
www.unisabana.edu.co
Vigilada Mineducación

Acreditación Institucional de Alta Calidad | 8 Años
Resolución n.° 06166 del 31 de marzo del 2017

Sobre la aportación de la memorización en el aprendizaje de las matemáticas:

el ejemplo de las tablas de multiplicar

Andrea Maffia[1]



Resumen

Aprender las tablas de multiplicar se considera sumamente importante en muchos países y muchos investigadores se han dedicado a comprender el proceso de memorización. A lo largo de los años, se ha entendido que memorizar las tablas de multiplicar no es necesariamente un proceso mecánico. En esta contribución, después de examinar algunos modelos desde investigaciones en el campo psicológico, se presenta brevemente un experimento que muestra cómo el aprendizaje relacional de las propiedades de la multiplicación puede apoyar la memorización de las tablas de multiplicar y, por lo tanto, presentarse como una alternativa válida a la repetición mecánica.

Palabras clave: memoria, multiplicación, escuela primaria, tablas de multiplicar.

Las tablas de multiplicar son quizás el contenido matemático más estudiado en psicología cognitiva. Desde 1970, muchos psicólogos han trabajado para determinar qué factores influyen en el recuerdo de los resultados de la multiplicación, evaluando los errores más frecuentes e intentando derivar un modelo para la organización de esta información en la memoria. Las metodologías de investigación son principalmente cuantitativas: en muchos trabajos se somete una gran muestra a una prueba de recuerdo o reconocimiento y se evalúa la corrección y velocidad de respuesta (Geary et al, 1986; Le Fevre et al, 2001; García-Orza et al, 2009). Otros investigadores se basan en el análisis de las actuaciones de sujetos con daño cerebral que repercute en la memoria (e.g. McCloskey et al, 1991). Sólo más recientemente se ha adoptado una perspectiva menos “clínica” y más “ecológica” mediante la cual se analizan cualitativamente los métodos de recuperación en tareas realistas. A partir de este tipo de estudios, es posible observar que la organización de las tablas de multiplicar en la memoria varía con el tiempo y para diferentes personas, por lo que, a diferencia de los primeros modelos estáticos, se han desarrollado modelos más dinámicos.

Las primeras investigaciones sobre la memorización de las tablas de multiplicar se ocuparon en identificar fenómenos recurrentes en la evocación de la memoria, en particular en lo que respecta a los posibles factores que hacen que la evocación de un resultado sea más simple o más compleja.

Son muchos los estudios en los cuales se destaca que las multiplicaciones que involucran números cercanos a diez requieren tiempos de respuesta más largos que aquellas en donde los factores están más cerca de la unidad (Parkman, 1972). De manera más general, encontramos errores con mayor frecuencia a medida que aumentan los factores (Stazyk, Ashcraft y Hamann, 1982). Esto se denomina *efecto del tamaño del problema* (McCloskey, Harley y Sokol, 1991).

A partir de estos fenómenos, Ashcraft desarrolló, en colaboración con algunos colegas, un modelo para la organización de las multiplicaciones en la memoria basado en la idea de que éstas estaban organizadas tal como están en una tabla real (Ashcraft, 1982). En su modelo de búsqueda de tablas, cada fila y columna está conectada a un nodo de entrada correspondiente a la posición de la fila/columna dentro de la tabla; por ejemplo 2 corresponde a la segunda fila al igual que 6 corresponderá a la sexta columna. Cuando se solicita una multiplicación, los nodos que representan los factores se activan y esta activación se distribuye en la fila y columna correspondiente; por lo tanto, habrá información que reciba mayor activación y sea aquella que corresponda al resultado del producto solicitado.

Este modelo permite explicar el efecto del *tamaño del problema* dado que cuanto mayores son los factores, mayor es el número de nodos que deben activarse antes de llegar al resultado (Ashcraft y Battaglia, 1978). Geary y colegas (1986) identifican un cierto número de multiplicaciones para las cuales el tiempo de respuesta es efectivamente proporcional al producto de los números involucrados en el hecho solicitado (ya sea aditivo o multiplicativo). Campbell y Graham (1985) señalan que esto es cierto sólo para productos que involucran 4, 8 o 9 como factores. Además, si el modelo fuera válido, entonces los tiempos de respuesta siempre deberían aumentar con el aumento del tamaño de los operandos; sin embargo, esto no sucede. Una excepción la dan los tiempos de respuesta a productos que involucran dos factores iguales (es decir, cuadrados, también llamados *tie problems* por Campbell y Oliphant, 1992).

Para proporcionar también una explicación a estos fenómenos, Campbell y Graham (1985) sugieren el *modelo de interferencia de red*. En este modelo, la memoria contiene varios tipos de información: los operandos individuales, los resultados, pero también las operaciones pensadas como una única información que incluye los dos términos y el símbolo. Los operandos, como en el modelo de Ashcraft, están asociados a resultados, pero estos también están asociados a operaciones. Esta segunda asociación es fundamental porque de lo contrario, al recordar una multiplicación como 8×4, los resultados relacionados con 8 y los relacionados con 4 se activarían de la misma manera; en consecuencia 24, que está conectado a ambos, recibiría una fuerte activación y por tanto no sería posible elegir entre 24 y 32 como respuestas. En cambio, el hecho de que 8×4 esté conectado a 32 y no a 24 significa que la activación del resultado correcto es más fuerte.

Además, los autores señalan que, en los errores cometidos con más frecuencia, los resultados correctos y recordados comparten uno de los dos dígitos y son del mismo “orden de magnitud”. Por tanto, suponen que también existen conexiones entre los resultados que serían las causas de las interferencias de las que dependen algunos errores.

En ninguno de estos modelos presentados hasta ahora se plantea la hipótesis de que una conexión creada pueda cambiar con el tiempo excepto en su estado de activación. Tampoco se tiene en cuenta la idea de que los nuevos conocimientos permiten reorganizar la memoria. Un primer modelo que implica una reorganización de las multiplicaciones aprendidas es el *modelo de distribución de asociaciones* propuesto por Siegler y Shrager (Siegler y Shrager, 1984; Siegler, 1988). El modelo prevé la presencia en la memoria de diferentes productos, cada uno de los cuales está asociado a uno o más resultados. Cuando los niños comienzan a aprender la multiplicación aún no conocen los resultados de los productos, por lo tanto, deben calcularlos siguiendo estrategias reconstructivas (por ejemplo, suma repetida). Cada vez que el niño obtiene un número como resultado de un producto, se crea una asociación en la memoria entre esa multiplicación y ese resultado. Por lo tanto, si el niño reconstruye el resultado incorrectamente, también se pueden crear asociaciones con resultados incorrectos. Cada vez que un número se asocia con una multiplicación, la fuerza de la conexión aumenta.

La hipótesis de que las estrategias utilizadas para reconstruir los resultados de la multiplicación tienen una función importante en la memoria fue propuesta por el psicólogo estadounidense Arthur J. Baroody en una publicación en *Developmental Review* en 1983. En este artículo, Baroody sostiene que la memoria no está ocupada por numerosas asociaciones entre piezas individuales de información que surgen como resultado de procedimientos de cálculo lentos, sino que “el cambio clave en la eficiencia con hechos numéricos implica el cambio de estrategias de conteo lento a conocimiento de procedimientos basados en principios. A medida que las reglas, heurísticas y principios se vuelven más familiares e interconectados, su uso para producir [...] resultados de multiplicación se vuelve más automático. Utilizar este conocimiento procedimental sería cognitivamente más económico que almacenar cada hecho individual en la memoria a largo plazo” (Baroody, 1983, p. 225). Como ejemplos se reportan hechos del tipo $4+0=4$ o $5 \times 0=0$ que, según el autor, no se almacenarían por separado, sino como una única regla del tipo $N+0=N$ o $N \times 0=0$ para cada posible N natural.

La mayoría de los errores consisten en vacilaciones, que podrían interpretarse considerando que, para los resultados no memorizados, la mayoría de los niños han desarrollado estrategias reconstructivas, penalizadas porque consumen mucho tiempo, pero que, además de permitirles llegar con resultados correctos, muestran la adquisición de habilidades más complejas que la simple memorización.

Baroody recopila datos para respaldar la hipótesis de que el conocimiento de la propiedad conmutativa mejora el desempeño de los estudiantes en la producción de resultados de multiplicación (Baroody, 1993). Concluye que el conocimiento relacional modifica la organización de las tablas de multiplicar en la memoria. El mismo resultado fue obtenido más recientemente por Butterworth y colegas (2003), quienes pidieron a niños de tercer, cuarto y quinto año de escuela primaria que dieran los resultados de algunas multiplicaciones. Desde una perspectiva cuantitativa, estos investigadores señalan que a medida que los niños crecen, el tiempo de respuesta a un producto de la forma N×m, donde N>m, disminuye en comparación con el tiempo de respuesta al producto m×N.

Mariotti y Maffia (2018) señalan que incluso en adultos la mayoría de las estrategias reconstructivas se basan en las propiedades de la multiplicación: utilizan la propiedad conmutativa, la propiedad asociativa y la propiedad distributiva para reconstruir aquellos resultados que no pudieron recordar directamente de memoria. Estas propiedades se aplican especialmente (pero no sólo) en el caso de multiplicaciones que involucran un factor mayor que 10.

El deseo de profundizar la investigación sobre cómo se pueden memorizar las tablas de multiplicar llevó al autor a centrar su tesis doctoral en este tema (e.g. Maffia y Mariotti, 2020). Se decidió experimentar con una serie de asignaciones basadas en la representación de multiplicaciones como rectángulos integrados en la tabla de Laisant. De hecho, el modelo rectangular es parte integral del desarrollo histórico de la operación de multiplicación y también es compatible con varias definiciones de la misma operación. El uso de representaciones analógicas también parece basarse en teorías neurocientíficas y psicológicas (Dehaene, 1992).

Las actividades con el artefacto “Tabla de Laisant” se propusieron a clases de diferentes niveles para trabajar diferentes aspectos de la multiplicación (propiedades conmutativas y distributivas, estrategias para comprobar la corrección del resultado, ...). Un ejemplo es la actividad realizada en una clase de segundo de primaria para la introducción a la propiedad conmutativa. Se pidió a cada niño que coloreara una caja de su elección de las de la tabla y luego recortara un rectángulo de cartón con las mismas dimensiones que la caja coloreada. La multiplicación correspondiente se escribió en la caja y el número de cuadrados que contenía se escribió en el rectángulo recortado. Posteriormente, se invitó a los niños a buscar otra caja en la tabla en la que el rectángulo de cartón se superpusiera exactamente y luego colorear esta caja también y luego insertar el producto apropiado (como se representa en la figura 1).

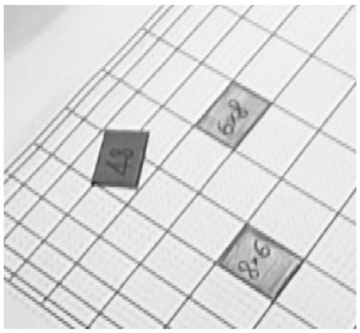


Figura 1: Ejemplo de la actividad realizada en relación con la propiedad conmutativa.

Después de esta serie de actividades en el aula, quisimos probar la capacidad de los estudiantes involucrados en las intervenciones docentes para recordar correctamente las tablas de multiplicar. Para esto se utilizó la "*Batteria per la Discalculia Evolutiva*" (BDE, Biancardi y Nicoletti, 2004), que contiene diversas instrucciones sobre cálculo tanto mental como escrito. Los autores de la prueba han proporcionado una puntuación para cada uno de los trabajos. Esta puntuación depende tanto de la exactitud de la respuesta como del tiempo de respuesta. La puntuación relativa a cada entrega se puede normalizar (mediante tablas de conversión adecuadas) con un valor entero inferior a 12.

Centramos nuestra atención en las puntuaciones obtenidas en las tareas relativas respectivamente a las "tablas de multiplicar" y a la "multiplicación mental", es decir, las dos tareas en donde interviene el recuerdo de las multiplicaciones. En estas dos tareas, la clase experimental (segunda clase de primaria) se comporta de forma completamente comparable a la muestra utilizada para la normalización del test (tercera clase de primaria). En la tarea de "multiplicación mental" la desviación es incluso menor que la de la muestra de validación del BDE.

Sin embargo, el rendimiento está por debajo del promedio en tareas aditivas y cálculo escrito. Por lo tanto, parece que los niños del grupo experimental tienen, en general, habilidades de cálculo normales (aunque muy variables dentro del grupo de clase) pero, en promedio, excelentes habilidades para recordar los resultados de las multiplicaciones, tanto cuando uno de los factores se presenta en forma consecutiva como de forma dispersa.

Un análisis de los tipos de errores cometidos por los estudiantes proporciona algunas indicaciones adicionales. A continuación, se muestra una representación gráfica de la frecuencia relativa de errores, dividida por tipo, en las tareas de "tablas de multiplicar" y "multiplicación mental" (Fig. 2).

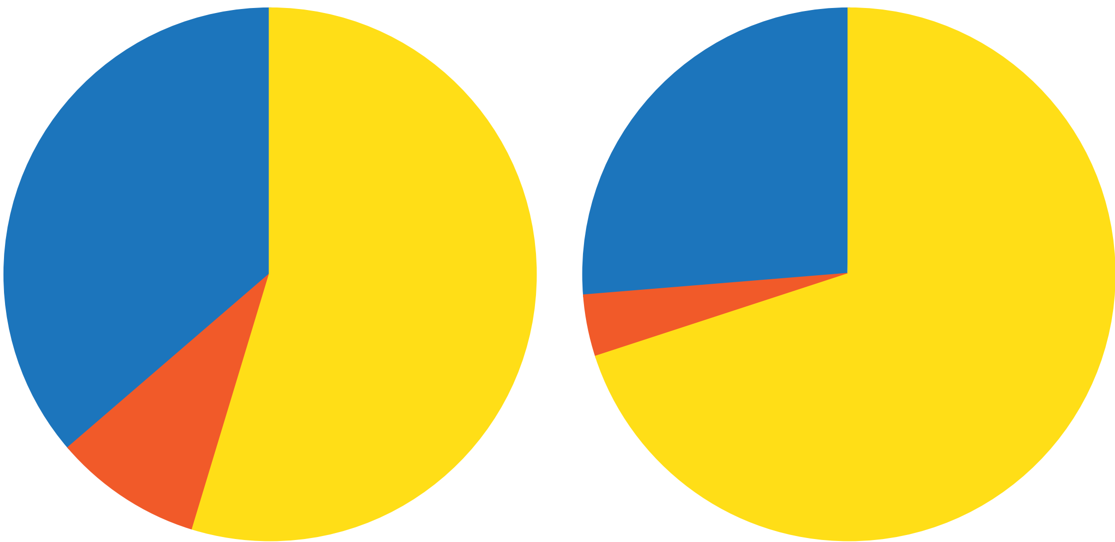


Figura 2: Frecuencias relativas de errores en las tareas de "tablas de multiplicar" (izquierda) y "multiplicación mental" (derecha) para la clase experimental. Los errores por vacilación (tiempo de respuesta superior a 2 segundos) se indican en amarillo, los casos en los que se indicó un resultado incorrecto en azul y las omisiones en naranja.

La mayoría de los errores consisten en vacilaciones, que podrían interpretarse considerando que, para los resultados no memorizados, la mayoría de los niños han desarrollado estrategias reconstructivas, penalizadas porque consumen mucho tiempo, pero que, además de permitirles llegar con resultados correctos, muestran la adquisición de habilidades más complejas que la simple memorización. El uso del modelo rectangular permitió introducir tempranamente las propiedades conmutativas y distributivas (en comparación con lo que se suele hacer en Italia). El análisis cualitativo muestra que los estudiantes aprendieron a utilizar estas propiedades (Maffia y Mariotti, 2020). Queremos subrayar que el propósito de esta discusión no es presentar este método como el "mejor" sino más bien como una posible alternativa. De hecho, se cree que es particularmente útil demostrar la existencia de prácticas alternativas a la memorización mecánica para permitir a los profesores tener opciones en cuanto a las propuestas a hacer a su clase. Los resultados aquí presentados se refieren a una pequeña investigación cuyos resultados ciertamente no son generalizables, pero que confirman la posibilidad de experimentar con nuevos enfoques que pueden ser más eficaces para memorizar las tablas de multiplicar, pero también (no secundariamente) para promover un aprendizaje matemático más general.

Referencias bibliográficas

Ashcraft, M. H. (1982). The development of mental arithmetic: A chronometric approach. *Developmental Review, 2*(3), 213-236.

Ashcraft, M. H., & Battaglia, J. (1978). Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory, 4*(5), 527-538.

Baroody, A. J. (1983). The development of procedural knowledge: An alternative explanation for chronometric trends of mental arithmetic. *Developmental Review, 3*(2), 225-230.

Baroody, A. J. (1993). Early mental multiplication performance and the role of relational knowledge in mastering combinations involving "two". *Learning and Instruction, 3*(2), 93-111.

Biancardi, A., & Nicoletti, C. (2004). *Batteria per la discalculia evolutiva*. Omega.

Butterworth, B., Marchesini, N., & Girelli, L. (2003). Multiplication facts: Passive storage or dynamic reorganization? In A. J. Baroody, & A. Dowker, *The development of arithmetical concepts and skills* (pp. 189-202). Erlbaum.

Campbell, J. I., & Graham, D. J. (1985). Mental multiplication skill: Structure, process, and acquisition. *Canadian Journal of Psychology/Revue canadienne de psychologie, 39*(2), 338-366.

Campbell, J. I., & Oliphant, M. (1992). Representation and retrieval of arithmetic facts: a network-interference model and simulation. In J. I. Campbell, *The Nature and Origines of Mathematical Skills* (pp. 331-364). Elsevier Science.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44*(1-2), 1-42.

García-Orza, J., Damas-López, J., & Matas, A. (2009). "2x3" primes naming "6": Evidence from masked priming. *Attention, Perception, & Psychophysics, 71*(3), 471-480

Geary, D. C., Widaman, K. F., & Little, T. D. (1986). Cognitive addition and multiplication: Evidence for a single memory network. *Memory & Cognition, 14*(6), 478-487.

LeFevre, J. A., Lei, Q., Smith-Chant, B. L., & Mullins, D. B. (2001). Multiplication by eye and by ear for Chinese-speaking and English-speaking adults. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 55*(4), 277-284.

Maffia, A., & Mariotti, M.A. (2018). Adults' Conception of Multiplication: Effects of Schooling on Multiplicative Conceptual Field. In Safford-Ramus K. et al. (Eds.) *Contemporary Research in Adult and Lifelong Learning of Mathematics* (pp. 95-108). Springer Nature.

Maffia, A., & Mariotti, M.A. (2020). From action to symbols: giving meaning to the symbolic representation of the distributive law in primary school. *Educational Studies in Mathematics, 104*(1), 25-40

McCloskey, M., Harley, W., & Sokol, S. M. (1991). Models of arithmetic fact retrieval: an evaluation in light of findings from normal and brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 17*(3), 377-397.

Parkman, J. M. (1972). Temporal aspects of simple multiplication and comparison. *Journal of Experimental Psychology, 95*(2), 437-444.

Siegler, R. S. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology: General, 117*(3), 258-275.

Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp. 229-294). Erlbaum.

Stazyk, E. H., Ashcraft, M. H., & Hamann, M. S. (1982). A network approach to mental multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 8*(4), 320-335.

Notas

1 Departamento de Matemáticas, Universidad de Bolonia, Italia.

El niño heroico

Algunas reflexiones sobre el aprendizaje en la educación matemática infantil

Luis Radford[1]

> […]las competencias del niño para interpretar el mundo de manera racional no son el resultado final de potenciales intelectuales ya presentes en la interioridad del niño desde su nacimiento; más bien, estas competencias para interpretar el mundo son un resultado del aprendizaje.

Resumen

En este artículo, intento cuestionar una concepción comúnmente inadecuada del niño, que a menudo sirve de base para el aprendizaje y la pedagogía en la educación infantil contemporánea: la concepción que denomino 'el niño heroico'. Con base en la obra de Lev Vygotsky, abogo por una perspectiva en la que se considere que el niño crece cognitiva y emocionalmente en íntima relación dialéctica con su contexto social histórico y cultural.

Palabras clave: educación infantil, Vygotsky, conceptos científicos.

Introducción

Hace unos años, el Ministerio de Educación de Ontario (OME) publicó el documento "How Does Learning Happen? Ontario's Pedagogy for the Early Years" (Ministerio de Educación de Ontario, 2014) con el objetivo de esbozar su enfoque pedagógico para la educación de la primera infancia. Como cualquier documento político de este tipo, este no puede evitar transmitir su propia concepción del niño. Al examinar detenidamente el documento, se observa que la concepción oficial del niño de Ontario no aporta nada nuevo. Por ejemplo, se menciona que "los niños son capaces de explorar el mundo que les rodea con su curiosidad y exuberancia naturales" (p. 7). A través de la participación en "el juego y la indagación, [los niños] desarrollan habilidades como la resolución de problemas, el pensamiento creativo y la innovación, esenciales para el aprendizaje y el éxito en la escuela y más allá" (OME, 2014, p. 7). Un poco más adelante, el documento añade:

> El juego activo (…) permite a los niños explorar con su cuerpo, su mente y sus sentidos, estimulándoles a formular preguntas, poner a prueba teorías, resolver problemas, participar en el pensamiento creativo y dar sentido al mundo que les rodea. Estas investigaciones a través del juego fusionan intelecto y sentimientos para ayudar a los niños a establecer conexiones y desarrollar la capacidad de pensamiento de orden superior (OME, 2014, p. 34).

El concepto de niño propuesto por el OME sigue una antigua tradición humanística que lo visualiza como un inquisidor natural que, a través del juego, se dedica a explorar su entorno y, de este modo, construye teorías que somete a pruebas para refinarlas.

El problema no radica en que los niños sean considerados como inquisidores naturales. Es innegable que los niños sienten curiosidad por su entorno. No obstante, los chimpancés jóvenes y las ardillas jóvenes también son inquisidores. Así, mientras escribo estas líneas, una ardilla se acerca para observar qué hago sentado en la mesa de mi patio. La ardilla es ciertamente curiosa. Mi argumento se centra en que el problema con la concepción que tiene el OME del niño (y no es el único en este enfoque, por supuesto) radica en concebir al niño como si ya estuviera dotado de la racionalidad necesaria para leer e interpretar el mundo, asumiendo que el niño es un científico chiquito.

La concepción inadecuada del niño

El psicólogo canadiense Jack Martin (2004) ha descrito (y criticado) esta concepción romántica y racional del niño, heredada del siglo de las luces, el siglo XVIII, que culminó con la Revolución Francesa y la publicación de la Crítica de la razón pura de Kant. Martin resumió esta concepción romántica del niño al señalar que implícitamente se utiliza el concepto de un ser adaptativo autorregulado en la educación y la psicología educativa; se trata de un

> [...]individuo que trabaja en relativa soledad, constituido por mecanismos, procesos, partes y estrategias propias [...] un actor individual capaz de acción y reflexión simultáneas sobre esta acción, muy parecido a un científico estereotípico en el escrutinio minucioso y el juicio de fenómenos experimentales de interés. [Un individuo] cuyos recursos más vitales están aparentemente disponibles dentro de su propia interioridad. [Un individuo] que ya sabe lo que hace y que sólo necesita un entorno facilitador para socializarse más plenamente e intelectualmente (Martin, 2004, pp. 193-194, 197).

Más de quince años después de la publicación del artículo seminal de Martin, muchos sistemas educativos (¿quizás la mayoría?), aún se basan en esta concepción truncada del niño que la pedagogía de inspiración piagetiana y el constructivismo en general han defendido con firmeza.

Por tanto, no debería sorprendernos que, en el marco de un proyecto de investigación actual sobre las matemáticas en la educación infantil, se nos recuerde sistemáticamente que las intervenciones pedagógicas de los educadores deben partir del niño, de sus propias ideas e intereses. Bajo esta perspectiva, el rol del educador consiste en aprovechar los intereses del niño y garantizar que el niño avance lo máximo posible en sus propias investigaciones; se dice que los educadores deben asegurarse de que el niño alcance su mayor potencial.

Por supuesto, el problema no consiste en descartar los intereses del niño. Es absolutamente importante tener en cuenta estas motivaciones. El problema reside en que los intereses del niño pueden no ser siempre suficientes. En este punto, resulta interesante la distinción de Vygotsky entre conceptos espontáneos y conceptos científicos.

Conceptos espontáneos y científicos

La noción de concepto científico de Vygotsky es muy compleja y no está exenta de críticas. Sin embargo, hay un aspecto en el cual considero que Vygotsky no admite discusión: mientras que los conceptos espontáneos surgen de la actividad espontánea del niño, como en el juego libre, los conceptos científicos, por el contrario, requieren una reflexión explícita y sistemática.

La singularidad de esta reflexión no solo radica en su naturaleza consciente y sistémica, como afirmaba Vygotsky, sino también en que la reflexión del niño refleja una manera específica, una manera cultural, de percibir y abordar las situaciones que enfrenta.

Así, cuando Magalie, de 2,5 años, coloca formas geométricas en los espacios tallados en un rompecabezas de madera, su actividad se basa en acciones perceptivas y kinestésicas de ensayo y error. Magalie aprende a hacer asociaciones y abstracciones, como la abstracción del color. El resultado de sus acciones y el uso de artefactos culturales generan un concepto (cultural) espontáneo.

No obstante, la definición del triángulo que sostiene en la mano en la figura 1, es decir, según la tradición euclidiana, como una región cerrada formada por tres segmentos lineales, no es algo que razonablemente esperaríamos que Magalie derive de su actividad espontánea. Tampoco sería una expectativa razonable la clasificación de los triángulos según sus ángulos o lados.

La definición y clasificación de las formas geométricas, que forman parte de los conceptos científicos de la cultura de Magalie, requieren una actividad reflexiva consciente y sistémica, así como una perspectiva cultural específica para interpretar las formas.

Esta perspectiva cultural específica para observar y describir las formas no surge únicamente de las acciones de Magalie, sino que también tiene raíces en su cultura. Por lo tanto, no sorprende que cuando observamos a niños pequeños comenzar a reconocer formas y a hablar de ellas de manera sofisticada (como clasificarlas o darles nombres) identifiquemos un complejo apoyo pedagógico detrás de sus logros. En lugar de ser cognitivamente neutro, este respaldo pedagógico, que incluye material didáctico, organización social y el diálogo entre el educador y el niño, se convierte en una parte integral de las conceptualizaciones emergentes del niño.

Figura 1. Magalie, de 2,5 años, enfrentándose a una tarea de asociación de formas.

El niño heroico

Estas observaciones nos llevan a replantearnos la cuestión del aprendizaje en la educación infantil. Si bien estoy de acuerdo en la importancia de tener en cuenta los intereses del niño, es crucial reconocer que dichos intereses y sus consiguientes logros, por sorprendentes que sean, podrían no ser suficientes para que el niño comprenda los conceptos científicos de su cultura.

En este sentido, encuentro muy problemático asumir, como suelen hacer los documentos políticos sobre la educación, aunque sea de forma implícita, que el niño ya llega al mundo provisto de la competencia y la racionalidad necesarias para leer e interpretar el mundo.

De esta problemática suposición surge el retrato ilusorio del niño, al que podríamos denominar el niño heroico: un científico en miniatura “cuyos recursos más vitales están aparentemente disponibles dentro de su interioridad desapegada” (Martin, 2004, p. 197) y que genera hipótesis y teorías espontáneamente, dedicándose a falsificarlas y corregirlas.

Debo señalar que mi argumento no busca restar importancia a la competencia del niño para aprender. Los niños no solo son curiosos, sino también competentes (véase, por ejemplo, Samara y Clements, 2009). Sin embargo, sostengo que esta competencia no debe entenderse como un atributo natural e intrínseco del niño. Más bien, es un resultado evolutivo y dinámico de la vida del niño en su entorno conceptual, espiritual y material. La competencia está vinculada con las tareas educativas ofrecidas al niño y a su interacción con adultos y otros niños. Es el desarrollo cultural de la competencia del niño lo que le permite leer el mundo de forma racional desde el punto de vista cultural y científico.

A modo de conclusión

En este breve artículo, he esbozado una crítica a una concepción persistente del niño que orienta las acciones pedagógicas en la educación infantil. Esta perspectiva, que he denominado el niño heroico, ha sido esencial en la escuela y pedagogía centrada en el niño (Neill, 1992; Rugg, 1969), y se fundamenta en la idea de que el aprendizaje surge de las hazañas que el niño despliega para satisfacer su “curiosidad y exuberancia naturales” (OME, 2014, p. 7).

Uno de los problemas inherentes a esta concepción es la consideración del niño como una entidad autosuficiente, para la cual el contexto socio-cultural-histórico es simplemente un conjunto instrumental de estímulos. Lamentablemente, esta perspectiva distorsiona la forma del proceso de aprendizaje y, lo que es aún peor, crea una brecha entre el niño y su comunidad, así como entre el niño y la cultura y la historia.

Siguiendo una perspectiva vygotskiana, he abogado aquí por una visión en la que el contexto, considerado como un sistema vivo, está lejos de ser simplemente un arsenal de estímulos externos. Desde este enfoque vygotskijano, las competencias del niño para interpretar el mundo de manera racional no son el resultado final de potenciales intelectuales ya presentes en la interioridad del niño desde su nacimiento; más bien, estas competencias para interpretar el mundo son un resultado del aprendizaje.

En este marco, comprendemos la relación entre el niño y su entorno social, histórico y cultural como relación dialéctica. Esto significa que, en su movimiento ontogénico, el niño llega a encarnar los sistemas de ideas y las formas de acción de su cultura, sistemas que siempre están cargados de tensiones y contradicciones. Recíprocamente, a medida que el niño participa en las prácticas culturales, refuerza, reproduce y produce su cultura. Es este movimiento dialéctico el que traté de ilustrar en un texto donde tomé a Platón como ejemplo. Al crecer, Platón aprendió griego y, desde su perspectiva aristocrática, desarrolló una visión sobre cómo deberían practicarse las matemáticas, cómo debería ser la ciudad —la polis — y quiénes deberían liderarla.

> Platón nos brinda, a través de su obra, una invaluable perspectiva para comprender la constitución dialéctica de la cultura y el sujeto. Con una brillantez incomparable, Platón formula una visión de la polis, revelándonos lo que significa ser un buen ateniense y cómo se debe vivir una vida plena (Radford, 2023, p. 222).

A lo largo de su obra, Platón plasma por escrito una visión cultural de la vida y el mundo que lo rodea.

> Sin embargo, al mismo tiempo, Platón es una encarnación de las tensiones y contradicciones atenienses. Sin pretender restarle brillantez, Platón es un producto de esas tensiones (p. 222).

Tanto Magali, la niña de 2,5 años de nuestro ejemplo, como Platón encarnan su cultura en un movimiento dialéctico que, simultáneamente, la producen.

Estas reflexiones me han llevado a abogar por una visión más abarcadora e inclusiva de la relación entre niños y educadores. En esta perspectiva, en lugar de concebirlos como entidades opuestas, como sucede en el constructivismo o en la enseñanza directa, se considera que niños y educadores trabajan juntos para hacer que las matemáticas surjan de formas ricas y variadas, imaginando nuevas prácticas matemáticas (Radford, 2023).

Referencias bibliográficas

Martin, J. (2004). La inadecuación educativa de las concepciones del yo en psicología de la educación. *Interchange: A Quarterly Review of Education*, *35*, 185-208.
Ministerio de Educación de Ontario (2014). ¿Cómo se aprende? Pedagogía de Ontario para los primeros años. Ottawa: Imprenta de la Reina para Ontario.
Neill, A. S. (1992). *Summerhill school: A new view of childhood*. St. Martin's Griffin.
Radford, L. (2023). *La teoría de la objetivación. Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Uniandes. https://bit.ly/Radford_TO
Rugg, H., & Shumaker, A. (1969). *The child-centered school*. World Book Company.
Samara, J., & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research. Trayectorias de aprendizaje de los niños pequeños*. Routledge.
Vygotsky, L. S. (1987). *Obras completas (Vol. 1)*. R. W. Rieber y A. S. Carton (Eds.). Plenum.

Reconocimientos

Este artículo fue escrito en el marco de un programa de investigación financiado por el Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).
Una versión anterior de este artículo apareció en B. D'Amore (Ed.), La didattica della matematica: riflessioni teoriche e proposte concrete (pp. 15-18). Bologna: Pitagora Editrice, 2021.

Notas

1 Laurentian University, Canadá.

Profesores de matemática, departamentos de matemática y comunidad de la educación matemática:

un diálogo imprescindible y necesario

Henry Alexander Ramírez Bernal[1]

Resumen

La premisa fundamental que orienta la presente reflexión es que la integración y articulación de esfuerzos entre profesores y departamentos de matemática por una parte, y la comunidad de investigadores en Educación matemática por otra, es crucial para mejorar la formación matemática de los estudiantes universitarios[2]. La discusión presentada se ubica, en la evidente distancia entre lo que sucede en las aulas universitarias de matemática y los avances en Educación matemática, enfatizando en cómo esta brecha podría afectar negativamente los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Palabras clave: enseñanza-aprendizaje de la matemática universitaria, educación matemática, profesores de matemática universitaria.

Propósitos de la reflexión

Como profesor de matemática universitaria, he observado repetidamente el deficiente desempeño de los estudiantes en matemática, evidenciado principalmente en sus bajas notas en exámenes y otras evaluaciones. Esta situación, aunque es solo una faceta de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática universitaria, desde mi perspectiva es la más problemática, y afecta fundamentalmente a estudiantes, profesores y departamentos de matemática[3]. Los departamentos de matemática, las instituciones y los profesores implementan diversas ideas y estrategias para mejorar el desempeño de los estudiantes en matemática, pero en mi experiencia como profesor universitario, he observado que estas iniciativas no siempre producen los resultados deseados.

¿Cuáles son las posibles causas de este hecho que, además, encuentro recurrente? Una respuesta parcial a esta pregunta podría estar en que estas iniciativas no toman en consideración los múltiples resultados que ofrece la investigación en Educación matemática. Incorporar estos resultados podría respaldar el diseño e implementación de soluciones científicamente fundamentadas para abordar las dificultades de los estudiantes y podría ayudar a mejorar otros aspectos de la enseñanza - aprendizaje de la matemática universitaria.

La presente reflexión surge, primordialmente, desde la óptica (y experiencia) de un profesor de matemática universitaria en ejercicio que observa, muchas veces con frustración y con cierta impotencia, las situaciones de fracaso de sus estudiantes en matemática y también, en cierta medida, desde la óptica del investigador que considera que aún hay mucho por aportar desde la Educación matemática a la práctica. Las ideas aquí expuestas reflejan la postura específica del autor y son, por tanto, discutibles y controvertibles[4].

Algunas estrategias e iniciativas frecuentes en los cursos de matemática

Para responder al deficiente desempeño en matemática de los estudiantes, se proponen[5] e implementan diferentes tipos de soluciones. Una estrategia frecuentemente usada es la oferta de diferentes tipos de cursos de apoyo para los estudiantes: complementarios a los cursos oficiales de cada asignatura, remediales, virtuales, introductorios y asesorías y tutorías personalizadas. Una característica común de estos cursos es el énfasis que se da a aspectos considerados problemáticos para los estudiantes como dificultades algebraicas (como operaciones entre expresiones algebraicas o solución de ecuaciones) o cuestiones aritméticas (por ejemplo, operaciones entre fracciones). Algunas de estas iniciativas pueden tener ciertos resultados considerados como “positivos”[6] pues pueden ayudar a mejorar en el corto plazo el desempeño de los estudiantes, pero es muy probable que a mediano o largo plazo las dificultades de los estudiantes reaparezcan. Esto último puede explicarse, al menos en parte, porque no se abordan de manera consistente las posibles causas de tales dificultades (que se podrían explicar en gran parte con los aportes de la Educación matemática).

Por ejemplo, si un estudiante resuelve ecuaciones lineales despejando la incógnita y usa expresiones del tipo “lo que está sumando pasa a restar” o “lo que está multiplicando pasa a dividir” para justificar su procedimiento y este aspecto de su argumentación no se aborda, el problema muy posiblemente persista; en este caso, nociones como la de “obstáculo didáctico” (Brousseau, 1976, 1983) y la de “transformación semiótica de tratamiento” (Duval, 1993, 1996) podrían ayudan a explicar las posibles causas de la situación descrita.

En otros casos se interviene en alguna parte puntual o específica del proceso de enseñanza – aprendizaje con la esperanza (en algunas ocasiones) de lograr mejorar casi que inmediatamente el desempeño de los estudiantes; por ejemplo, se enfatiza fuertemente en los aspectos evaluativos: se implementan diferentes modalidades de evaluación, se “endurecen” o se “flexibilizan” los criterios de evaluación o se proponen las llamadas evaluaciones conjuntas[7]. Sin embargo, si al mismo tiempo no existe un seguimiento continuo del proceso de aprendizaje de los estudiantes, más allá de la evaluación en el que se consideren los aspectos problemáticos de ese aprendizaje[8] es muy probable que no se logren los resultados esperados. Considero que no es posible resolver sólo aspectos asociados a la evaluación sin una reflexión crítica sobre los procesos de aprendizaje. Por otra parte, no se puede pretender resolver cuestiones ligadas al aprendizaje y la evaluación sin estar dispuestos a revisiones o seguimientos profundos y detallados al desarrollo de los aspectos curriculares ligados a los diferentes cursos de matemática universitaria.

En otros casos se implementan estrategias como el aula invertida o el aprendizaje basado en problemas, que no están específicamente enfocadas al aprendizaje matemático. Con estas propuestas, existe el riesgo de que no se logren los aprendizajes esperados, lo que puede llevar a situaciones similares a las experimentadas en el pasado; por ejemplo, el fracaso de ciertas herramientas enfocadas a la enseñanza de la matemática y cuyo origen se vincula con la emergencia de las Matemáticas modernas.

Como consecuencia del auge de las Matemáticas modernas surgieron diferentes herramientas que se consideraban efectivas para la enseñanza de la matemática[9] (D’Amore, 2024) como los bloques lógicos de Dienes o las regletas de Cuisinaire. Estas propuestas fueron cuestionadas críticamente por investigadores como Guy Brousseau (D’Amore, 2024) por la falta de evidencia de sus pretendidos aportes al aprendizaje matemático de los estudiantes[10].

En 2015, D’Amore y Fandiño Pinilla presentaron un análisis detallado de ciertas “propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática” (D’Amore, & Fandiño Pinilla, 2015, p. 7); los ejemplos mencionados en el párrafo anterior, así como los juegos lúdicos y el uso de las TIC como garantía de aprendizaje constituyen ejemplos de “instrumentos ilusorios” (D’Amore, & Fandiño Pinilla, 2015, p. 25). D’Amore y Fandiño Pinilla (2015) también se refieren a ideas metodológicas que influyeron la enseñanza-aprendizaje de la Matemática de forma ilusoria como la teoría ingenua de conjuntos o las recetas metodológicas para resolver problemas.

La posible adopción de propuestas como el aula invertida o el aprendizaje basado en problemas (sólo para citar dos ejemplos) como metodologías pueden ser muy “atractivas” para efectos de la enseñanza de la matemática, pero no aportar de manera significativa a su aprendizaje. No pretendo sugerir que estas metodologías no sean oportunas, pero sí que deben someterse a un análisis crítico y científico en el marco de la Educación matemática (por parte de departamentos de matemática y de profesores) sobre su pertinencia en cada caso específico. Un ejemplo ilustrativo es el estudio de Fúneme Mateus (2019) en el que se implementó el aula invertida para el desarrollo de algunas clases de cálculo diferencial (con estudiantes de primer semestre de universidad); en estas se estudiaron algunas aplicaciones de la derivada (razones de cambio y problemas de optimización). En una de las conclusiones, Fúneme Mateus señala que esta tendencia en la enseñanza puede ser útil en algunos aspectos, pero debe pensarse “con mayor profundidad de forma que atienda realmente a las necesidades y dificultades que enfrentan los estudiantes en sus procesos de aprendizaje, pues hasta el momento se hace mayor énfasis en cómo enseñar y no en cómo aprender. (Fúneme Mateus, 2019, p. 171).

¿Cuáles son las posibles causas de este hecho que, además, encuentro recurrente? Una respuesta parcial a esta pregunta podría estar en que estas iniciativas no toman en consideración los múltiples resultados que ofrece la investigación en Educación matemática.

Una nota sobre la formación de los profesores de matemática universitaria

Otro aspecto que quiero considerar aquí es el de las posibles limitaciones en la formación específica de los profesores de matemática universitaria en Educación matemática, lo que puede incidir negativamente en su comprensión de los procesos de aprendizaje matemático, en sus estrategias de enseñanza y en la comprensión de las dificultades de los estudiantes. Como muestra de esto último puede citarse lo reportado por algunos estudios, como los de Gagatsis y Kyriakides (2000) o Ramírez (2013) en los que se evidencia que profesores universitarios suelen atribuir las causas de los errores de sus estudiantes en matemática a cuestiones como la falta de interés o la falta de comprensión por parte de los estudiantes. De acuerdo con Ball, Thames y Phelps (2008) los profesores deben estar en capacidad de evaluar tanto los errores en matemática de sus estudiantes como sus posibles causas.

Muchas veces se considera que es suficiente con una sólida formación matemática para asumir la responsabilidad docente en los cursos de matemática universitaria, pero tan importante como esa sólida formación matemática debe ser una comprensión profunda de los procesos de enseñanza – aprendizaje de la matemática y aún más de las dificultades que enfrentan los estudiantes al aprender matemática.

¿Cómo puede aportar la Educación matemática a los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática universitaria?

El interés por la enseñanza – aprendizaje de la matemática tiene algunos de sus primeros indicios con Jean Le Ronde D'Alembert[11] y más adelante con la fundación de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática ICMI[12]. La Educación Matemática es fundamental para comprender críticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Desde diversos enfoques teóricos, se investigan las dificultades de los estudiantes, cuestiones curriculares, formación didáctica para los profesores y aspectos emocionales y culturales. En la Educación matemática se reconoce la singularidad de la matemática, lo que subraya la necesidad de una didáctica específica.

A través de su dinámica y prolífica historia, son diversos tanto los problemas abordados como los enfoques de investigación; por razones de espacio. aquí solo me refiero a dos ellos. David Tall (Artigue, 2016) lideró diferentes estudios con un enfoque marcadamente cognitivo[13] en los que se interesó por profundizar en diferentes aspectos problemáticos del aprendizaje del cálculo y el análisis.

La teoría de obstáculos (Brousseau, 1976, 1983) ha contribuido a explicar parte de las dificultades de los estudiantes en su comprensión de conceptos como los de límite o del infinito. Cornu (1991) estudió cuatro obstáculos epistemológicos en la historia del concepto de límite basándose en el trabajo de Brousseau. En Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011), se presenta un estudio detallado de la didáctica del infinito matemático que incluye los obstáculos epistemológicos y didácticos asociados a su aprendizaje.

Artigue (2016) destaca la relevancia de teorías como la Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOS) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), así como el creciente interés en aspectos semióticos del aprendizaje en la investigación en Educación Matemática universitaria. Sin embargo, muchas de estas teorías, junto con otros estudios y resultados en el campo, son desconocidos para muchos profesores universitarios de matemática.

> [...] una debilidad aun latente de la Educación matemática universitaria "es la difusión insuficiente de los resultados de investigación hacia las comunidades o profesionales relevantes, y la influencia muy limitada de nuestra investigación en las prácticas de enseñanza universitaria" (Artigue, 2016, p. 21).

La necesidad del diálogo entre la Educación matemática y la comunidad de profesores universitarios de matemática

Aún hoy persisten discusiones entre profesores sobre las dificultades de los estudiantes para comprender conceptos como el de límite o el del uso de la derivada en problemas de optimización. A menudo, estas dificultades se atribuyen a explicaciones simplistas como la pereza o la falta de compromiso de los estudiantes. Es muy posible que se sigan tomando decisiones curriculares, metodológicas o programáticas sobre la enseñanza aprendizaje de la matemática sin una base sólida en la investigación, sin una formación adecuada de los profesores y sin metas realistas y alcanzables en los procesos de formación universitaria en matemáticas. Por otra parte, como lo señala Artigue (2016), una debilidad aun latente de la Educación matemática universitaria "es la difusión insuficiente de los resultados de investigación hacia las comunidades o profesionales relevantes, y la influencia muy limitada de nuestra investigación en las prácticas de enseñanza universitaria" (Artigue, 2016, p. 21).

De lo anterior, puede decirse que existe una brecha evidente, una distancia marcada que, en mi opinión, puede (y debe) ser borrada (o al menos reducida) con la participación activa de profesores e investigadores en Educación matemática. No puede ser que los resultados de la investigación en Educación matemática, tan relevantes para comprender las complejidades de lo que significa aprender matemática, se queden únicamente en repositorios institucionales o en las revistas especializadas y no sean aprovechados de maneras oportunas en la práctica.

Los resultados de la investigación, fundamentales para comprender las complejidades del aprendizaje matemático, no deberían quedarse únicamente en repositorios institucionales o revistas especializadas, sino que deben aprovecharse de manera oportuna en la práctica educativa, con lo que podría reducirse la evidente distancia entre la investigación en Educación Matemática y su aplicación práctica en el aula. La participación activa tanto de profesores e investigadores puede dinamizar tanto los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática como las investigaciones en Educación matemática.

> La Educación Matemática es fundamental para comprender críticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Desde diversos enfoques teóricos, se investigan las dificultades de los estudiantes, cuestiones curriculares, formación didáctica para los profesores y aspectos emocionales y culturales. En la Educación matemática se reconoce la singularidad de la matemática, lo que subraya la necesidad de una didáctica específica.

Referencias bibliográficas

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos: filosofía y didáctica del infinito matemático.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Artigue, M. (2016, March). Mathematics Education Research at University Level: Achievements and Challenges. En *Proceedings of INDRUM 2016. First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Montpellier.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En W. Wanhamme, & J. Wanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématics,* Actes de la XXVIIIème rencontre CIEAEM, Louvain la Neuve, 5-12 août 1976.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *4*(2), 164–198.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D., *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Kluwer Academic Publishers.

D'Amore, B. (2024). Algunos elementos históricos específicos sobre la evolución de la Educación matemática como disciplina de investigación. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 48*(186), 195-204.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática. *Educación matemática*, *27*(3), 7-43.

Duval, R. (1993). Régistres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37-65.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle.

Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática: evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Editorial Magisterio.

Fúneme-Mateus, C. C. (2019). El aula invertida y la construcción de conocimiento en matemáticas. El caso de las aplicaciones de la derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 45, 159-174.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, *6*(1), 24-58.

ICMI. (2024). Historical Sketch of ICMI. Recuperado de https://www.mathunion.org/icmi/organization/historical-sketch-icmi

Ramírez, G. (2012). Diseño e implementación de un curso remedial sobre tópicos de matemática elemental, en un entorno de aprendizaje colaborativo, con apoyo en las TIC. *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela*, *27*(3), 007-020.

Ramírez, H. (2013). *Tipología de errores y dificultades de aprendizaje de la Matemática de estudiantes de primer curso de Matemática. Análisis epistemológico, semiótico y didáctico.* (Tesis de Maestría). Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Notas

1 Doctorado Interinstitucional en Educación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

2 En el presente artículo se centra la atención en el caso de estudiantes de programas de pregrado como Ingenierías, Ciencias económicas y administrativas y otros programas, diferentes a la carrera de Matemáticas, que incluyan cursos de matemática.

3 Me refiero a los departamentos de matemática que gestionan, organizan y coordinan los cursos de matemática para las diferentes carreras de pregrado en las universidades.

4 Algunas precisiones. En el presente artículo se hace referencia específicamente a los procesos de enseñanza – aprendizaje de la matemática universitaria para estudiantes de carreras de pregrado como Ingenierías, Ciencias económicas y administrativas y otros programas, diferentes a la carrera de Matemáticas. Aunque mucho de lo discutido se suscribe al ámbito específico de Colombia, es factible que docentes de otros países de Latinoamérica se identifiquen, al menos en parte, con lo enunciado aquí. Adicionalmente, cuando se habla de profesores o docentes se hace referencia específica a profesores o docentes en servicio (o en ejercicio).

5 Usualmente desde los departamentos de matemática.

6 Por ejemplo, se sugiere revisar el artículo de Ramírez (2012).

7 Evaluaciones diseñadas por equipos de profesores para aplicar a diferentes cursos que toman una misma asignatura.

8 Por ejemplo, dificultades, obstáculos, errores; la evolución de las diferentes tipologías de ese aprendizaje (Fandiño Pinilla, 2010) en los diferentes cursos, cuestiones asociadas al desarrollo del currículo (por ejemplo, pertinencia de los tiempos para estudiar los diferentes temas a tratar en cada clase, competencias a desarrollar) y coordinación entre los profesores de una misma asignatura, para citar solo algunos.

9 Aunque se usaron fundamentalmente en educación primaria, el ejemplo citado ilustra una situación que podría presentarse también en el caso de la enseñanza-aprendizaje a nivel universitario.

10 Se sugiere, a quienes deseen profundizar sobre las críticas a estas propuestas, revisar el citado artículo de D'Amore (2024); en este documento se presentan algunos de los cuestionamientos de Guy Brousseau a estas herramientas para la enseñanza de la Matemática.

11 D'Amore (2024) señala que Jean Le Ronde D'Alembert (1717 - 1783) y Denis Diderot (1713 - 1784) intentaron responder preguntas como "¿Qué significa 'sencillo de entender'? ¿Lo 'sencillo' es lo mismo para el científico que para un niño que aprende? ¿O existe alguna diferencia? Si es así, ¿cuál es?" (D'Amore, 2024, p. 196).

12 Por sus siglas en inglés. International Commission on Mathematical Instruction.

13 Tall (1991) coordinó la publicación del libro Advanced Mathematical Thinking en el que se aborda el estudio de "los procesos de aprendizaje de los estudiantes, los modos de pensamiento, concepciones y dificultades" (Artigue, 2016, p. 15).

Algunas notas sobre la concepción dialéctico-materialista de la categoría de sujeto

Rodolfo Vergel[1]

> *Es imposible comprender el mundo si se analizan los fenómenos aislados entre sí, como hacen los metafísicos.*
> Ovshi Yajot

Resumen

En este artículo se exponen algunas notas sobre la concepción dialéctico-materialista de sujeto. Se sugiere la importancia de discutir esta concepción a partir de algunas raíces filosóficas que posibilitan un acercamiento comprensivo a los aspectos históricos y culturales que permean la categoría de sujeto. Se consideran brevemente las repercusiones educativas en términos de pensar y desarrollar actividades a través de las cuales los sujetos encuentren formas culturales de ser y puedan expresarse a través de ellas.

Palabras clave: sujeto, actividad, cultura, dialéctico-materialista, historia, sociedad.

A manera de introducción

Parece claro que los idealistas ortodoxos no necesitaran de la mediación porque simplemente todo emana de sus mentes. En contraste con esta postura idealista, hay que reconocer que los conceptos, por ejemplo, son formas de mediación que implican que la realidad nos llega transformada gracias a la actividad humana. En otras palabras, la realidad no nos viene dada en bruto a la mente (resulta modificada, transformada, adaptada mediante el lenguaje que sufre iguales modificaciones), como tampoco es meramente instrumental el papel de los medios a través de los cuales nos llega. Tampoco es difícil reconocer que nuestro cerebro opera a través de recursos culturales. Pero dichos recursos no son simples agregados a la actividad mental, más bien elementos constitutivos de esta.

La idea de cultura planteada indica una procedencia desde la perspectiva antropológica y sugiere que el sujeto que aprende es, también, un sujeto socio-histórico, un sujeto que se encuentra inmerso en una cultura de la cual hereda maneras de actuar, formas de hablar y de razonar (Montagu, 1968). La cultura crea formas especiales de comportamiento y modifica la actividad de las funciones mentales (Vygotsky, 1997). En tal sentido, sería difícil tanto teórica como pragmáticamente concebir al individuo como aquel que está movido por un poder de auto determinación cuyos significados emanan del individuo en cuestión. Aceptar esta posición significaría desconocer, por ejemplo, que los signos y los artefactos median (en el sentido de hacer parte constitutiva de) en las formas de pensar de los sujetos (Vergel, 2014), así como desestimar el papel de la cultura y de la historia en las formas de pensar y de actuar de ellos. De hecho, “la historia de algo, sea lo que fuere, guarda la más estrecha e indestructible relación con la idea que de ese algo se tenga” (Hegel, 1955, p. 5).

Algunas consideraciones dialéctico-materialistas sobre la categoría de sujeto

Afirmar que el mundo es social y cultural no es un eslogan. Es mucho más profundo de lo que parece. Tendríamos que reconocer, por un lado, que dicho mundo está conformado por conceptualizaciones histórico-culturales. Pero no solo esto. Hay una dimensión de *trascendencia* en el sentido de que estas conceptualizaciones nos superan, nos abarcan. El significado de trascendencia no se entiende aquí en el sentido kantiano, pues las conceptualizaciones aludidas aparecen inexorablemente en el mundo material. Por ejemplo, aparecen en el lenguaje que usamos, en nuestras intuiciones y en las decisiones que tomamos, en las formas de pensar, en nuestras acciones cotidianas, en fin.

De aquí que es difícil pensar al sujeto en el sentido individualista, es decir, no dependiente de aspectos históricos y culturales. Como bien lo señala Yajot (1973, p. 33), "el hombre vive en la sociedad y es producto de determinadas relaciones sociales y condiciones históricas. Sólo sobre esta base puede ser comprendido". Esto significa, contrariamente a la posición individualista, ver a los sujetos como sujetos de necesidad y entidades histórico-culturales en perpetua transformación. Es lo que, desde la perspectiva de Spinoza, se entendería como *"modo de la sustancia"* (Espinoza, 2015). El sujeto o formas del ser o *"modo"* según Spinoza, es entendido como "lo que es y se define en relación a la sustancia, por lo que depende de ella en todo" (Espinoza, 2015, p. 63). En otras palabras, y siguiendo a Spinoza, esto significa que cada uno de nosotros es una realidad singular, individual y limitada por la sociedad, y es en la sociedad donde cada uno de nosotros encontramos los elementos a través de los cuales pensamos subjetivamente el mundo. La idea de sujeto autónomo y terminado, que ya no tiene nada más que aprender y que está ya desarrollado, no existe; siempre nos estamos produciendo cotidianamente en la historia.

Claramente somos seres humanos que heredamos formas de funcionamiento en sociedad[2]. Pero estas formas de funcionamiento, o como diría Zubiri (2006), *"modo de estar en la realidad"* o modo de estar en el mundo, se entienden como *"Principio de posibilidades".* Esto significa que aquellos sujetos apoyados precisamente en el modo recibido, determinan su modo de estar en la realidad optando por aceptarlo, rechazarlo, modificarlo, etc. El ser humano, más allá de su aspecto individual (sus diferencias respecto a los otros) y de su aspecto social (su convivencia en sociedad), tiene un aspecto histórico en tanto que *continuador.* Siempre tendremos un "venir de" y un "ir hacia", siempre tendremos un carácter histórico (Zubiri, 2006). Como corolario podemos afirmar que si los elementos históricos y culturales son periféricos, esto puede deberse a que estamos considerando al sujeto como una entidad sustancial kantiana. Es justamente la crítica que hace Marx en sus *Manuscritos económico filosóficos* al discutir que es imposible considerar al sujeto como una entidad ajena a la sociedad en la que se encuentra. Dice Marx:

> Hay que evitar ante todo el hacer de nuevo de la "sociedad" una abstracción frente al individuo. El individuo es el ***ser social.*** Su exteriorización vital (aunque no aparezca en la forma inmediata de una exteriorización vital comunitaria, cumplida en unión de otros) es así una exteriorización y afirmación de la ***vida social***[3]. (Marx, 1981, p. 146)

Y también afirma que "Así como es la sociedad misma la que produce al *hombre* en cuanto *hombre*, así también es *producida* por él"[4] (Marx, 1981, p. 145). La concepción dialéctico-materialista de sujeto hace presencia en este planteamiento de Marx. Es por ello que no puede pensarse al sujeto ajeno a la sociedad, como se ha señalado anteriormente, pues el sujeto es en sí mismo una *entidad relacional*, en tanto que es profundamente social no solo porque es fruto de relaciones sociales, sino porque también es una expresión o forma de la sociedad en que se enmarca. En términos de Marx:

> El hombre así, por más que sea un individuo particular (y justamente es su particularidad la que hace de él un individuo y un ser social *individual* real), es, en la misma medida, la *totalidad,* la totalidad ideal, la existencia subjetiva de la sociedad pensada y sentida para sí[5]. (Marx, 1981, p. 147)

Esta idea dialéctico-materialista esbozada interpela necesariamente la idea de conciencia. Rosental y Straks (1960, p. 158) sostienen que "en toda sociedad, cambia primero la vida material social, y después, y en consonancia con ello, cambia también la conciencia de los hombres". Es claro que al cambiar la conciencia de los hombres se posibilita el primer paso hacia la transformación de la sociedad. He aquí otra vez la fuerza de la concepción dialéctico-materialista de sujeto.

Síntesis y consideraciones finales

La idea de sujeto discutida aquí puede tener profundas repercusiones desde un punto de vista educativo. No considerar los aspectos históricos y culturales en la idea de sujeto, como se ha planteado en este artículo, y tal vez conceptualizarlo como entidad sustancial kantiana, podría ignorar el desarrollo de subjetividades críticas y correr el riesgo de focalizar las actividades en la dimensión del saber, pero un saber desprovisto también de características histórico-culturales. El sujeto que lee un libro o que aborda una tarea matemática no está solo, está interactuando con las ideas de otros. Es por esto que, como sugiere Garaudy (1970, p. 100), "La subjetividad nace de la comunicación. Desde un principio yo me aprehendo como individuo sobre un fondo de comunidad". Quizás, para decirlo una vez más, el individuo es, para Marx, "el conjunto de sus relaciones sociales" (Garaudy, 1970, p. 100).

Las repercusiones educativas aludidas podrían estar orientadas hacia promover permanentemente el ejercicio de plantear actividades a través de las cuales los sujetos encuentren formas culturales de ser y puedan expresarse a través de ellas, a partir de formas de colaboración e interacción humanas no alienantes. Dicha actividad o trabajo "es un proceso que invade todo el ser del hombre y constituye su carácter específico" (Kosik, 1979, p. 217). Se hace, pues, necesario pensar y materializar actividades en las cuales los estudiantes se posicionen críticamente frente a ideas matemáticas, científicas, estéticas, etc., que discutan y argumenten, de manera que haya un crecimiento subjetivo socialmente responsable de los estudiantes.

Difícilmente podríamos argumentar la idea según la cual *"todo se origina en el individuo",* y que la historia y la cultura existen, pero como aspectos periféricos o como meras curiosidades intelectuales, no como *categorías orgánicas* en las explicaciones de las formas en que nuestros estudiantes llegan a aprender y a ser.

Referencias bibliográficas

Espinoza, L. (2015). *Spinoza.* RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales.
Garaudy, R. (1970). *Marxismo del siglo XX*. Fontanella.
Hegel, G. (1955). *Lecciones sobre la historia de la filosofía I.* Fondo de Cultura Económica.
Kosik, K. (1979). *Dialéctica de lo concreto*. Grijalbo.
Marx, K. (1981). *Manuscritos: economía y filosofía.* Alianza Editorial.
Montagu, A. (Ed.). (1968). *Man's adaptive dimension*. Oxford University Press.
Rosental, M. M. y Straks, G. M. (1960). *Categorías del Materialismo Dialéctico.* Grijalbo.
Schaff, A. (1965). *Filosofía del hombre. ¿Marx o Sartre?* Grijalbo.
Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios, 39*, 65-76.
Vygotsky, L. S. (1997). *Collected works. Vol. 3. Problems of the theory and history of psychology.* Plenum.
Yajot, O. (1973). *Qué es el Materialismo Dialéctico.* Progreso.
Zubiri, X. (2006). *Tres dimensiones del ser humano: individual, social, histórica*. Alianza Editorial.

Notas

1 Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
2 Como señala Adam Schaff, "Las opiniones de los hombres ya están socialmente condicionadas y determinadas a través del hecho fundamental de que el individuo humano es la obra de la sociedad, "un conjunto de relaciones sociales" (Schaff, 1965, p. 122). De hecho, "las consideraciones "solitarias" del individuo están conformadas y controladas socialmente. Por tanto, el individuo siempre otorga y disfruta, en determinado sentido, del consejo social" (Schaff, 1965, p. 123).
3 Cursiva en el original.
4 Cursiva en el original.
5 Cursiva en el original.

Biblioteca del maestro

Los problemas de matemática en la práctica didáctica

Bruno D’Amore. Colección didáctica. Editorial Magisterio. Bogotá, 2021. 417 páginas. Tamaño 16x24.
ISBN: 978-958-20-1413-1

Resolver problemas de matemática es una de las tareas que resulta más difíciles para los estudiantes en todos los niveles escolares.
Existen delicados aspectos cognitivos, relativos a la matemática, como también afectivos de diversa naturaleza. Es por esto que, desde hace ya varias décadas, estudiosos de psicología, pedagogía, y didáctica estudian el…. problema de los problemas.
En este libro, el experto italiano en didáctica de la matemática Bruno D’Amore recoge, ilustra y comenta (siempre críticamente) todos estos estudios, proponiendo Hipótesis personales con el único fin de ayudar a los docentes a entender siempre más y en profundidad esta problemática ofreciendo elementos científicos para poder enfrentar este tipo especial de didáctica, de forma concreta.

La matemática no sirve para nada

Provocaciones y respuestas para saber más

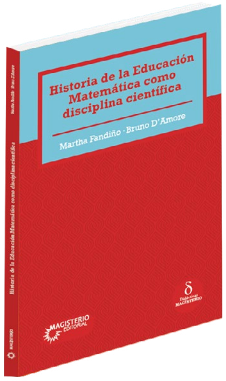
Giorgio Bolondi y Bruno D’Amore Editorial Magisterio. Bzzogotá 2022. Colección Didáctica. Tamaño 16x24. 139 páginas. ISBN: 978-958-20-1438-4

La matemática siempre deja una huella, en quien la estudia, negativa; algunos quedan fascinados descubriendo su sublime encanto; otros la odian y la rechazan generalmente sólo por no conocerla en profundidad. Ninguno queda indiferente. Y así, también los grandes personajes que poco o nada tienen que ver con esta disciplina expresan su parecer, halagador o de rechazo. Los autores Giorgio Bolondi y Bruno D´Amore, apasionados y expertos de la didáctica de la matemática, eligieron algunas frases que comentan, tomando como base el ámbito histórico en el cual fueron expresados como la actualidad de la misma, esto con el objetivo de iniciar un diálogo con los lectores que permita superar lugares comunes y abra vastos horizontes acerca de la matemática, fascinante disciplina que es humanismo, lógica y poesía, pero también música y arte.

Memorias de una vida

Bruno D’Amore. Editorial Magisterio. Bogotá 2023. Tamaño 16x24 cm. Colección Didáctica. 286 páginas. ISBN: 978-958-20-1466-7

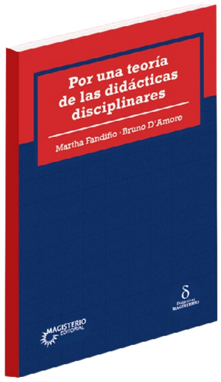
En este libro el autor narra en primera persona medio siglo de actividad no sólo en didáctica de la matemática, una disciplina científi¬ca aún hoy en evolución, a través de la descripción de las relaciones personales con numerosos estudiosos extranjeros de gran impacto dentro de esta disciplina, así como también sus incursiones en otros campos de la cultura que ha explorado en el transcurso de su vida. Bruno D’Amore ha dedicado su vida principalmente al estudio de la didáctica de la matemática. Pero no ha dejado de lado incursionar en otras aventuras, no sólo de carácter cultural.



Historia de la Educación Matemática como disciplina científica

Martha Isabel Fandiño Pinilla y Bruno D'Amore. Prólogos de Luis Ángel Bohórquez Arenas y de Giorgio Bolondi. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá 2024. Tamaño 16x24 cm. Colección Didáctica. 172 páginas.
ISBN: 978-958-20-1472-8

La disciplina "Didáctica de la Matemática" forma parte, en el mundo universitario italiano, de la agrupación MAT 04; los cursos de esta disciplina se imparten en todas las universidades italianas en distintos cursos académicos: Facultad de Ciencias, carreras para la formación de profesores de primaria, maestrías y doctorados de investigación. Este texto traza brevemente las líneas internacionales de evolución histórica de esta disciplina, con sus antecedentes, en un intento por explicar cuáles han sido las premisas de las condiciones actuales compartidas internacionalmente.



Por una teoría de las didácticas disciplinares

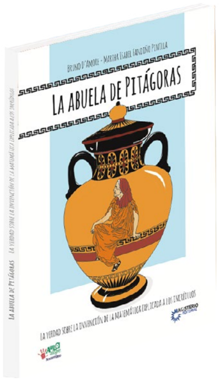
Martha Isabel Fandiño Pinilla y Bruno D'Amore. Traducción: Cristian Camilo Fúneme Mateus. Editorial Magisterio. Bogotá 2024. Tamaño 16x24. Colección Didáctica. 144 páginas.
ISBN: 978-958-20-1473-5

Este libro presenta un estudio sistemático de las que hoy se conocen como didácticas disciplinares. Aunque pertenecen al mundo pedagógico de la Didáctica, tienen especificidades propias que las caracterizan y distinguen, dado que desde hace algunas décadas se reconoce a cada didáctica disciplinar una fuerte especificidad que tiene que ver con la disciplina de referencia. Sin duda, la Educación Matemática fue la primera didáctica disciplinar que se hizo autónoma, que evolucionó de manera científica y que fue reconocida como disciplina científica de pleno derecho (una verdadera Matemática Aplicada); pero, en opinión de los autores de este libro, todas las didácticas disciplinares tienden hoy a desarrollarse en la misma dirección.

Teorías relevantes en educación matemática

Miglena Asenova, Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Cristian Camilo Fúneme Mateus, Maura Iori, George Santi, Miglena Asenova, Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Cristian Camilo Fúneme Mateus, Maura Iori, George Santi. Prólogo de Rodolfo Vergel. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá 2024. 192 páginas. Tamaño 16x24cm. Colección Didáctica.
ISBN: 978-958-20-1475-9

La Educación matemática, considerada por diversos estudiosos como una Matemática aplicada (aplicada a la problemática del aprendizaje escolar), tiene sólo medio siglo de historia; sin embargo, cuenta con todos los prerrequisitos para ser considerada una disciplina de investigación científica estable. Su nacimiento se remonta a la propuesta, iniciada por Guy Brousseau ya en los años setenta, de la llamada "teoría de las situaciones"; pero, a medida que ha ido evolucionando la investigación y los estudios relacionados, tanto teóricos como empíricos, muchos otros Autores han propuesto teorías que hacen explícitos y formalizan elementos específicos de la disciplina.



La abuela de Pitágoras
La verdad sobre la invención de la matemática explicada a los incrédulos

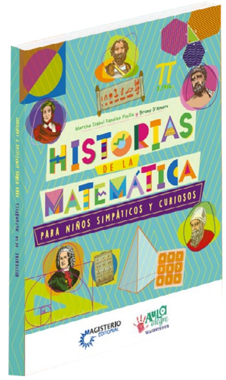
Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla. Prefacio de Maurizio Matteuzzi. Traducción: Diana Milena Celi Garzón. Editorial Magisterio. Bogotá 2024. Tamaño 16x21. Colección Aula Alegre. 174 páginas 4x4 tintas. ISBN: 978-958-20-1476-6

¿Quién dijo que no se puede bromear con la matemática? ¿Quién nos impide pensar que el teorema de Pitágoras fue demostrado no por el grande matemático de Samos sino por su adorada abuela? ¿Por qué no imaginarnos que el Teorema de Tales se relaciona con dos gemelitos inquietos? O, quizá, ¿que uno de los axiomas de Peano surgió mientras reflexionaba sobre los gastos de su empleada doméstica? O ¿que el eje de ordenadas fue añadido al eje de abscisas y no por la brillante intuición de Descartes sino por un sacerdote que lo reprendía por libertino? ¿por qué no?

Cuando el alumno supera al maestro

Bruno D´Amore. Editorial Magisterio. Bogotá 2022. Colección Didáctica. Tamaño 16x24. 183 páginas. ISBN: 978-958-20-1439-1. Traducción. Isabel Cristina Cárdenas

D'Amore alcanza múltiples resultados: reúne una serie de bellos relatos con la inventiva y el tono propio de la "ligereza" de Italo Calvino. Contribuye a dar fuerza a un género cada vez más presente en la narrativa contemporánea, es decir, el relato con fondo histórico. Y sobre todo pone en escena el gran tema no sólo antropológico, sino también literario y artístico de la convergencia - divergencia generacional, proyectándolo sobre figuras del pasado con una óptica dirigida obviamente hacia nuestro atormentado tiempo.



Historia de las matemáticas para niños simpáticos y curiosos

Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla. Editorial Magisterio. Bogotá 2024. Tamaño 16x21. Colección Aula Alegre. 80 páginas. Tintas 4x4. ISBN. 978-958-20-1474-2

La matemática está presente en el mundo de maneras que el ser humano ha tratado de encontrar desde el principio de los tiempos. De este modo, ha descubierto la posibilidad de medir un objeto con la luz solar, la perfección geométrica de una colmena o incluso lo divertido que puede ser jugar sumando números. ¡Adelante! En estas páginas encontrarás anécdotas, datos curiosos y experiencias que te demostrarán que la magia de la matemática ahora está al alcance de tu mano. Martha Isabel Fandiño Pinilla y Bruno D'Amore son matemáticos muy bien conocidos internacionalmente, que se ocupan principalmente de la Educación Matemática; en este caso decidieron buscar la forma de conquistar la curiosidad de los niños para contarles de forma alegre, divertida y concreta cómo se desarrolló la Matemática y quiénes fueron los principales creadores de esta disciplina.

Didáctica de la matemática

D'Amore, Bruno. Colección Didácticas. Editorial Magisterio. Bogotá, 2da. ed. 2011. 470 páginas. ISBN: 978-958- 20-0860-4

Este libro es un estudio en el que se habla y reflexiona sobre la educación y sobre las matemáticas. El objeto de esta reflexión lo constituye la didáctica de la matemática, sobre la reflexión teórica y la investigación en este campo, por ello también se habla sobre indagación sistemática y sobre método. En este libro, Bruno D 'Amore hace distintas aproximaciones a la fundamentación teórica y a la investigación en Didáctica de la Matemática, con un planteamiento ordenado y metódico.

En unos casos se ocupa de temas estrictamente curriculares, centrados en el contenido matemático, como ocurre con el de¬bate sobre conceptos y objetos matemáticos, el análisis de los registros de presentaciones o con el análisis de las dificultades cognitivas.